

Introduction

Définition : ensemble de deux charges opposées dont la distance de séparation est faible devant les distances observation (approximation dipolaire)

Importance : système électrique minimal qui caractérise la matière, constituée d'édifices microscopiques neutres : le champ créé est de type dipolaire (par opposition avec les effets polaires liés aux excès de charge) et les effets subis (action d'un champ extérieur) sont de type dipolaire

I Potentiel et champ créés par un dipôle électrostatiqueI.1. Rappel des lois de l'électrostatique

- Structure du champ $\vec{E}$: à circulation conservative

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Conséquences : action de potentiel $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ ou $\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_A - V_B$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV \Rightarrow \text{si } V = \text{cte}, \vec{E} \perp d\vec{r} : \text{lignes de champ} \perp \text{équipot.}$$

- Relation champ-source (th. de Gauss)

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \text{ou} \quad \oint \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{ex}} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Solution pour une charge ponctuelle $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM^2} \frac{\vec{PM}}{PM}$

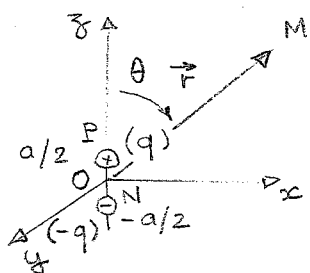
- Relation potentiel-source (Eq. de Poisson)

$$\Delta V = -\rho / \epsilon_0$$

Solution pour une charge ponctuelle $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM} + \text{cte}$ (cte = 0 si $V(\infty) = 0$)

Rem : équations linéaires $\Rightarrow$ principe de superposition

symétrie des sources $\Rightarrow$ symétrie de $\vec{E}$ et V (principe de Curie)

II.2. Potentiel créé par le dipôle. Moment dipolaire

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NP} \right)$$

Approximation dipolaire $r \gg a$

$$\frac{1}{PM} = (r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \cos \theta)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} + \frac{a}{2r^2} \cos \theta + \dots$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$\Rightarrow$ décroît en $\frac{1}{r^2}$ (compensation à grande distance des effets polaires)

$\Rightarrow \vec{p} \equiv q\vec{a} = q\vec{OP} - q\vec{ON} (= \sum_i q_i \vec{r}_i)$ caractérise entièrement le dipôle (en C.m.)

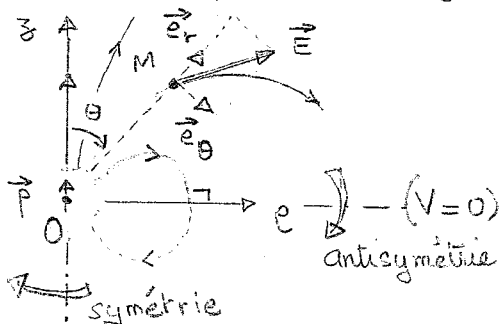
$\Rightarrow$ symétrie cylindrique ($\partial V / \partial \varphi = 0$) ; $V(\frac{\pi}{2}) = 0$: plan d'antisymétrie

II.3. Champ créé par le dipôle. Lignes de champ

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(r, \theta)$: utilisation des coordonnées sphériques (r, θ, φ)

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} ; E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} ; E_\varphi = 0$$

$\Rightarrow$ décroît en $\frac{1}{r^3}$; $\Rightarrow$ symétrie de révolution ;



- Lignes de champ (loin du dipôle)

$\Rightarrow$ symétrie de révolution autour de Oz

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta =$ base locale

$\Rightarrow$ Calcul : $\vec{E} \times \vec{or} = 0 \Rightarrow r = \text{cte} \times \sin^2 \theta$

$\Rightarrow$ orthogonales aux équipotentielles

(A présenter sur transparent)

II Action d'un champ extérieur

II.1. Force résultante

On note $\vec{E}_a$ le champ appliqué (à ne pas confondre avec $\vec{E}$ = champ créé)

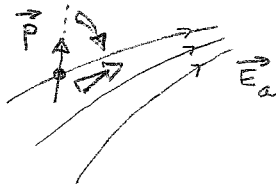
$$\vec{F} = q\vec{E}_a(P) - q\vec{E}_a(N) = q[\vec{E}_a(\frac{a}{2}\vec{e}_z) - \vec{E}_a(-\frac{a}{2}\vec{e}_z)] = qa \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_a \Big|_0 = (\vec{P} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E}_a$$

Le dipôle se déplace vers les zones de champ intense ; si $\vec{E}_a$ uniforme : $\vec{F} = \vec{0}$

II.2. Moment résultant

$$\vec{\Gamma}_0 = \frac{a}{2}\vec{e}_z \times \vec{F}_P - \frac{a}{2}\vec{e}_z \times \vec{F}_N = \frac{\vec{P}}{2} \times [\vec{E}_a(P) + \vec{E}_a(N)] = \vec{P} \times \vec{E}_a \text{ (app. dipolaire)}$$

Le dipôle s'oriente selon les lignes de champ



Applications: visualisation des lignes de champ

: attraction d'un isolant (bout de papier,

filet eau, poussières par un objet électrisé) - Il

s'agit de dipôles induits $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}_a)$

II.3. Energie potentielle

Energie potentielle d'interaction d'un dipôle rigide avec les sources d'un champ appliqué $\vec{E}_a$:

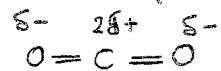
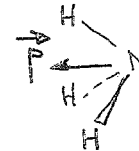
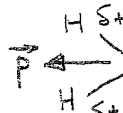
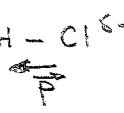
$$\vec{F} = \vec{\text{grad}}(\vec{P} \cdot \vec{E}_a) \equiv -\vec{\text{grad}} E_{pe} \text{ avec } E_{pe} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_a$$

Evolution du dipôle E_{pe} minimale si $\vec{P} \cdot \vec{E}_a \cos \theta$ maximal $\Rightarrow E_a$ maximal (translation) et $\theta = 0$ (orientation)

III Applications

III.1. Moments dipolaires microscopiques

Moment permanent de molécules hétéropolaires (ne possédant pas de centre d'inversion): $\delta^+ \text{H} - \text{Cl} \delta^-$



$\vec{P} = \vec{0}$ (moment

quadrupolaire)

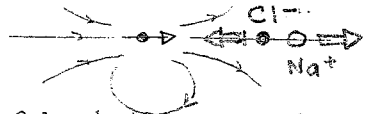
Ordre de grandeur: $q \sim e$, $a \sim 10^{-10} \text{ m}$

$\Rightarrow P \sim 1,6 \times 10^{-29} \text{ C.m}$ (unité usuelle $1 \text{ Debye} = \frac{1}{3} \times 10^{-29} \text{ C.m}$)

Exemple $P(\text{H}_2\text{O}) = 1,86 \text{ D}$

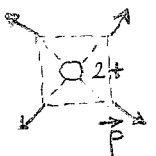
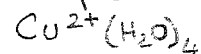
III.2. Actions de dipôles rigides sur des charges

- Dissolution des sels dans des liquides polaires (notamment e'eau)



séparation des ions de charges opposées

- Solvatation des ions: formation de complexes: exemple



III.3. Interactions entre dipôles

- Structuration des milieux polaires (comme e'eau ou la glace)
arrangements tétraédriques des molécules ("liaisons hydrogène")

$$E_{12} = -\vec{P}_1 \cdot \vec{E}_2(1)$$

- Interactions entre dipôles induits (force de Van der Waals)

$$E_{12} \sim C_6 / r^6 \text{ faibles et à courte portée}$$

Conclusion

Rappel des résultats essentiels

Les milieux matériels constitués de dipôles (permanents qui s'orientent) ou induits (polarisabilité électronique et ionique) revêtent des propriétés diélectriques importantes pour les applications (condensateurs, optique).

17

CARTES DU CHAMP ELECTROSTATIQUE ET DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE ; RELATIONS AVEC LEURS SOURCES SYMETRIES ET INVARIANCES PAR GROUPE DE TRANSFORMATION, AUTRES PROPRIETES, EXEMPLES (PCSI)

Introduction : En régime stationnaire, le champ électrique est créé par des charges ; le champ magnétique par des courants : les sources sont des distributions de charges et de courants invariantes dans le temps ($q = \text{cte}$, $I = \text{cte}$). La première approche (historique) est l'expression de ces champs créés par des sources élémentaires

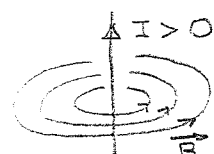
Loi de Coulomb :



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

Les lignes "divergent" à partir de la source

Loi de Biot et Savart



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{e}_\varphi$$

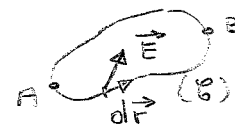
Les lignes "s'enroulent" autour de la source

On se propose de préciser la topographie ("carte") des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à partir de leur nature physique, et des propriétés de symétrie et d'invariance
 $\Rightarrow$ Intérêt : avant tout calcul, préciser a priori les variables pertinentes et les composantes nulles.

I Structure des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Relations avec les sources

I.1. Structures des champs statiques

a) $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ ou $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ b)



$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \mathcal{V}_{A \rightarrow B}$$

circulation conservative

a) $\text{div} \vec{B} = 0$ ou $\oint \vec{B} \cdot \vec{n}_{ex} d\mathcal{S} = 0$ b)



$$\oint \vec{B} \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = \Phi(\mathcal{V})$$

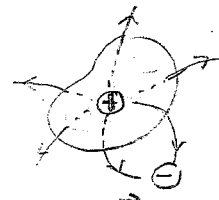
flux conservatif

c) $\vec{B}$ normal continu (les lignes de $\vec{B}$ sont toujours fermées)

c) $\vec{E}$ tangentiel continu

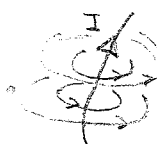
I.2. Relations entre champs et sources (théorèmes de Gauss et Ampère)

a) $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
 b) $\oint \vec{E} \cdot \vec{n}_{ex} d\mathcal{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$
 c) $\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$



Les lignes de $\vec{E}$ ne sont pas fermées

a) $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
 b) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$
 c) $\vec{n}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{J}_s$



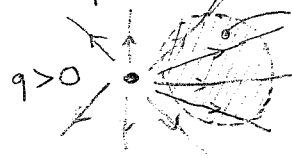
Remarques : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'explicitent dans une base selon trois composantes qui dépendent de trois variables. Leur topographie (représentation des lignes ($\vec{E}$ ou $\vec{B}$ // $d\vec{r}$)) nécessite a priori la connaissance de 9 dérivées :

$\frac{\partial E_x}{\partial x}, \frac{\partial E_x}{\partial y}, \frac{\partial E_x}{\partial z}, \frac{\partial E_y}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial y}, \dots \Rightarrow$ ceci est "condensé" en $\text{div} \vec{E}$ et $\vec{\text{rot}} \vec{E}$

Ne pas confondre le champ et la valeur de ce champ dans une zone particulière de l'espace

Exemples :

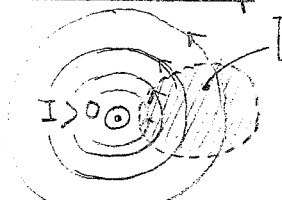
dans $\mathcal{U}$ on a :



$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \\ \text{div} \vec{E} = 0 \text{ (absence de charge)} \end{cases}$$

mais $\vec{E} \neq \vec{0}$

dans $\mathcal{U}$ on a :



$$\begin{cases} \text{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} = 0 \text{ (absence de courant)} \end{cases}$$

mais $\vec{B} \neq \vec{0}$

II Symétries et invariances

II.1. Principe de Curie

Les éléments de symétrie des causes (sources) doivent se retrouver dans les effets produits (champs)

II.2. Invariances d'espace-temps (choix des variables)

Si les sources sont invariantes :

- par translation dans le temps ($\partial \rho / \partial t = 0$, $\partial \vec{J} / \partial t = 0$) : alors $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne dépendent pas de t : c'est le cas en électro- et magnéto-statique
- par translation dans l'espace ($\partial \rho / \partial z = 0$, $\partial \vec{J} / \partial z = 0$) : alors $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont invariants par rapport à toute translation selon Oz ($\partial \vec{E} / \partial z = \vec{0}$, $\partial \vec{B} / \partial z = \vec{0}$)
- par rotation autour d'un axe (φ autour de Oz) : alors dans la base tournante (coordonnées cylindriques) $\partial E_u / \partial \varphi = 0$, $\partial B_u / \partial \varphi = 0$, $u = r, \varphi, z$

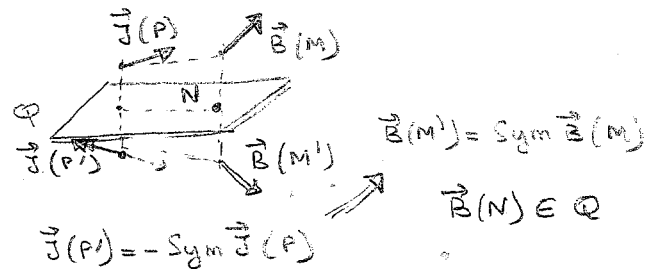
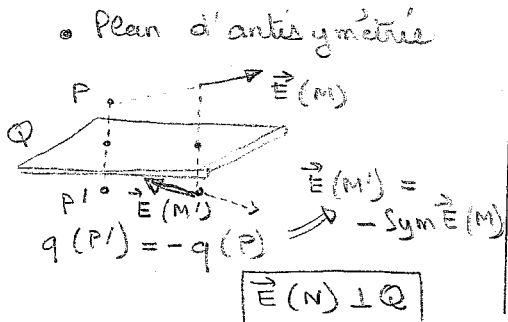
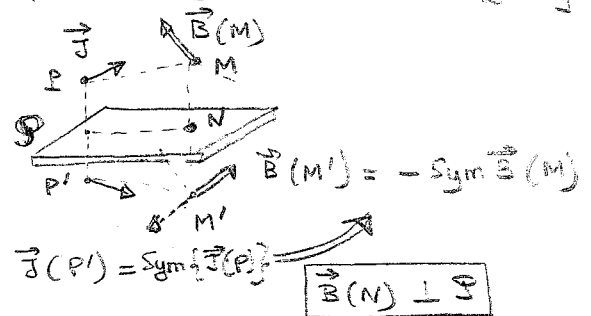
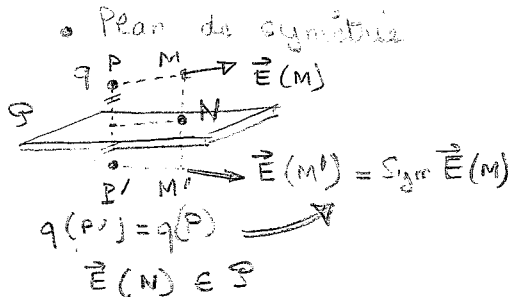
$\Rightarrow$ Choix des coordonnées pertinentes (cartésiennes ; cylindriques ; sphériques)

II.3. Symétries par rapport à un plan

- Nature des grandeurs physiques

$\vec{E}$ = vecteur polaire
"symétrique"

$\vec{B}$ = vecteur axial (pseudo-vecteur)
"antisymétrique"
(dépend de l'orientation arbitraire de l'espace : $\vec{e}_z$ coïncide avec $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$)

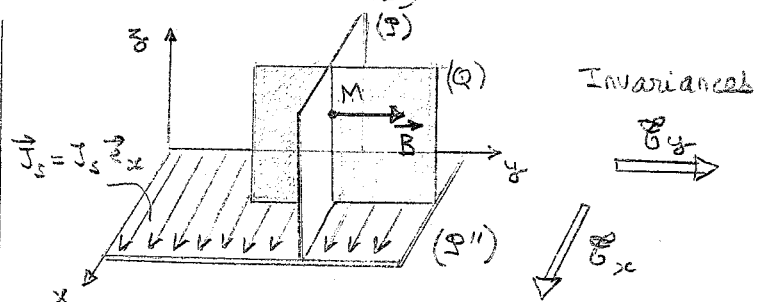
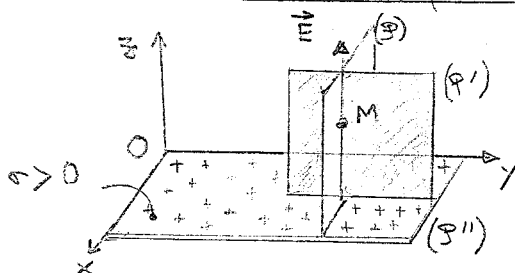


$\Rightarrow$ Permet de réduire le nombre de composantes

Remarque : modélisation des sources ; à leur voisinage on peut les considérer comme d'extension "infinie" (on néglige les effets "de bord") mais en toute rigueur les lignes de $\vec{J}$ sont fermées, S et Q de valeur finie.

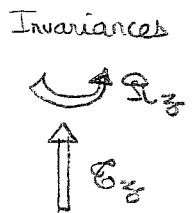
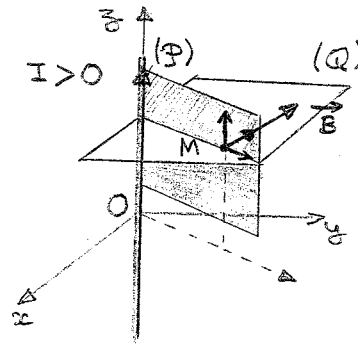
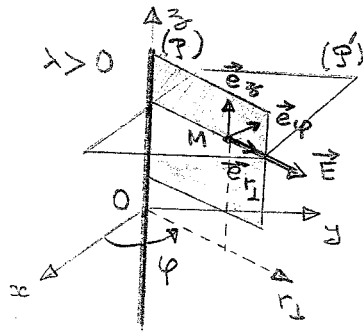
III Exemples

III.1. Symétrie plane (coordonnées cartésiennes)



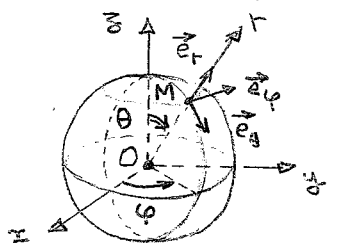
- Invariances $\vec{E} = \vec{E}(z)$; $\vec{B} = \vec{B}(z)$
- $\forall M, M \in (\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$: $\vec{E} = E_z(z) \vec{e}_z$
 $\forall M, M \in (\mathcal{P})$: $\vec{B} = B_y(z) \vec{e}_y$ } les considérations de symétrie ne donnent pas le sens
- $M \xrightarrow{\mathcal{P}'} M' = \text{Sym } M \Rightarrow \vec{E}(M') = \text{Sym } \vec{E}(M) \Rightarrow E_z(z)$ fonction impaire
 $\Rightarrow \vec{B}(M') = \text{Sym } \vec{B}(M) \Rightarrow B_y(z)$ fonction impaire
- $z > 0$ et $z < 0$: pas de source : champs localement uniformes
- Relations de passage : $E_z(z) - E_z(-z) = \sigma / \epsilon_0 \Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}$
 $-[B_y(z) - B_y(-z)] = \mu_0 J_s \Rightarrow B_y(z) = -\mu_0 \frac{J_s}{2} \frac{z}{|z|}$

II.2. Symétrie de révolution (coordonnées cylindriques)



- Invariances $\vec{E} = \vec{E}(r_\perp)$; $\vec{B} = \vec{B}(r_\perp)$
- $\forall M, M \in (\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$: $\vec{E} = E_r(r_\perp) \vec{e}_r$
 $\forall M, M \in (\mathcal{P})$: $\vec{B} = B_\phi(r_\perp) \vec{e}_\phi$ } Base locale $(r_\perp, \phi, z)$
- Théorème de Gauss $\oint \vec{E} \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = \oint E_r(r_\perp) \vec{e}_r \cdot \vec{n} d\mathcal{S}$
 choix du cylindre $(r_\perp) \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = E_r 2\pi r_\perp L_z = \frac{\lambda L_z}{\epsilon_0}$
 $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_\perp}{r_\perp^2}$
- Théorème d'Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B_\phi(r_\perp) \vec{e}_\phi \cdot d\vec{\ell}$
 choix du cercle $(r_\perp) \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_\phi 2\pi r_\perp = \mu_0 I$
 $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} \vec{e}_\phi$

II.3. Symétrie sphérique (coordonnées sphériques)



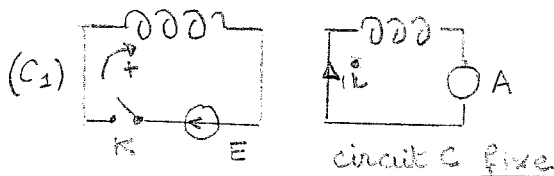
- Invariances par rotation $\Rightarrow$ distribution isotrope
 $\vec{e} = e(r)$; $\vec{j} = \vec{j}(r)$ et donc $\vec{E} = \vec{E}(r)$; $\vec{B} = \vec{B}(r)$
- $\forall M, M \in (O\phi)$ et $(O\theta)$ qui sont plans de symétrie
 $\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r$ et $\vec{B} = \vec{0}$
- Théorème de Gauss $\oint E_r(r) \vec{e}_r \cdot \vec{n} d\mathcal{S} = 4\pi r^2 E_r$ (choix d'une sphère)
 $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2} \vec{e}_r$

Conclusion

- Illustration dans le cadre de l'électrostatique et de la magnétostatique de la puissance des considérations de symétrie en physique
- Caractère "symétrique" de $\vec{E}$ (tenseur de rang 1) et "antisymétrique" (tenseur de rang 2) qui conduit à $\vec{E} \perp \mathcal{Q}$ et $\vec{E} \perp \mathcal{F}$
- Principe de Curie
- Intérêt : permet de prévoir la topographie ("carte") des champs indépendamment de tout calcul. Le dernier n'intervient que pour déterminer les valeurs.

Introduction

- Induction électromagnétique = loi fondamentale de l'électromagnétisme qui détermine la structure du champ et établit un couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
- Découverte historique des lois par M. Faraday (1831)
- Applications : génération d'énergie électromagnétique en régime variable autre que celles limitées aux régimes stationnaires (piles, accumulateurs...).

I. Induction dans un circuit fixeI.1. Faits expérimentaux

Dans C : apparition d'un courant i dès que le flux magnétique varie

- fermeture de K $\Rightarrow i < 0$
- ouverture de K $\Rightarrow i > 0$
- éloignement de $C_1 \Rightarrow i > 0$

S'il on rompture (C_1) par un aimant mobile $\Rightarrow$ courant i

Le produit Ri ne dépend pas de la nature de l'enroulement, mais uniquement de sa géométrie.

Faraday établit que ce produit est l'opposé du taux de variation du flux magnétique

I.2. Force électromotrice d'induction

La mise en mouvement ($\vec{v}_0 = \vec{0}$) des électrons dans (C) ne peut être due qu'à une force électrique puisque $\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$ (même si $\vec{v} \neq \vec{0}$ cette force ne travaille pas !).

- Définition d'une fem : $e \equiv \frac{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_C d\vec{l}}$ = travail fourni à l'unité de charge en mouvement dans le circuit ; ce travail doit compenser les pertes par effet Joule (toujours < 0)

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{E}_J \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} - Ri^2 dt = 0 \Rightarrow e = Ri$$

d'où donc $e = - \frac{d\Phi}{dt}$ (Loi de Faraday)

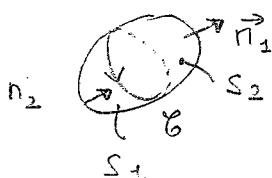
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \oint_S (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$, mais ne dépend que de la géométrie, soit :

$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (C = contour mathématique quelconque) : en régime variable, la circulation de $\vec{E}$ n'est plus conservative

II. Equation de Maxwell - Faraday - Fem. d'inductionII.1. Structure du champ ($\vec{E}, \vec{B}$) en régime variable

- Conservation du flux magnétique : $\text{div } \vec{B} = 0$



$$\oint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_{2,ex} dS = 0 = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{1,ex} dS + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{2,ex} dS$$

soit $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ = flux à travers n'importe quelle surface s'appuyant sur $C = \Phi_C$

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_C (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot \vec{n} dS \quad \left. \begin{array}{l} \forall S \Rightarrow \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right\} \text{Equation de Maxwell - Faraday}$$

Définition du notationnel $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$

II.2. Expression de la fem

$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \equiv \vec{\text{rot}} \vec{A}$ ($\vec{A}$ potentiel vecteur), soit $\phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$

D'où $\vec{\text{rot}} (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \equiv \vec{\text{grad}}(-V)$ (V potentiel scalaire)

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_C (-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \cdot d\vec{r} = \int_C (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot \vec{n} dS = - \frac{d\phi}{dt}$$

Exemple : spire fixe dans un champ tournant uniforme

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (B_a S \cos \alpha) = B_a S \omega \sin \omega t \quad \text{si } \alpha = \omega t$$

Induction mutuelle et auto-induction : $\phi = \phi_p + \phi_e \leftarrow$ flux extérieur

Les relations étant linéaires $\phi_p \equiv L i$ (flux propre)

$\phi_e \equiv M i_1$ (i_1 = courant dans le circuit inducteur)

$e = -L \frac{di}{dt} - \frac{d\phi_e}{dt}$

d'induction mutuelle (en H) $M =$ coefficients d'auto-induction et

Loi de Lenz : $e = - \frac{d\phi}{dt} = R i \Rightarrow i = - \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}$; si $\phi \nearrow$ $i < 0$

II.3. Applications

- Générateur à induct fixe
- Transformateur

III. Energie magnétique

III.1. Définition - Expression en fonction de ϕ et de i

Travail fourni aux charges du circuit $\delta W_g = e \delta q = -i \delta \phi$

Pour un circuit fixe $\delta W_g = -i d(Li) = -d(\frac{1}{2} Li^2) \equiv -d\epsilon_m$

Energie magnétique du circuit $\epsilon_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} i \phi = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}$

Bilan d'énergie : $d\epsilon_m = -e \delta q = -R i^2 dt$: l'énergie électromagnétique du circuit (fixe) est entièrement dissipée par effet Joule.

III.2. Expression en fonction du champ

Circuit réel $i d\vec{l} \Rightarrow \vec{J} dV$

$$\epsilon_m = \frac{1}{2} i \phi = \frac{1}{2} i \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



S = section du fil

$$L \Rightarrow \epsilon_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV \quad (\vec{J} = \frac{i}{S}, dV = S dl)$$

$$\vec{B} \equiv \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{th. d'Ampère}) ; \quad \frac{1}{\mu_0} (\vec{A} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}) \equiv \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\vec{B} \times \vec{A}) + \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$\epsilon_m = \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mu_0} dV + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \text{div}(\vec{B} \times \vec{A}) dV$$

En étendant à tout l'espace $A \sim \frac{1}{r^2} \quad B \sim \frac{1}{r^2} \quad \epsilon \sim r^2$

$$\epsilon_m = \int_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$

Exemple : solénoïde (approximation $l \gg R$) ; calcul de L

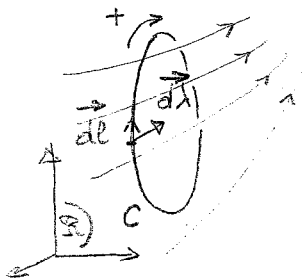
$$\epsilon_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} V = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 i^2 S l \quad \text{d'où } L = \mu_0 n^2 S l$$

Conclusion

- Importance des phénomènes d'induction d'un point de vue fondamental et pour les applications.
- Rappel des résultats importants (Maxwell-Ampère, Faraday, ϵ_m)

Introduction.

Un circuit mobile dans un champ magnétique est le siège de phénomènes d'induction : ceci est à la base de nombreuses applications pour réaliser des générateurs de courant électrique, en particulier au niveau industriel (centrales électriques). Ceci réalise une transduction d'énergie (transformation d'énergie mécanique en énergie électromagnétique) dont le "pivot" est le conducteur en mouvement.

I Expression de la f.ém d'inductionI.1. Expression en fonction du champ magnétique

$\vec{B}$ (champ appliqué, dû à des sources extérieures ; les phénomènes d'auto-induction sont négligés ($\vec{B}_{\text{circuit}} \ll \vec{B}$))

$d\vec{l}$ = élément du circuit, supposé filiforme et de composition matérielle constante

$d\vec{\lambda}$ = déplacement élémentaire d'un point du circuit

$\vec{V} = \frac{d\vec{\lambda}}{dt}$ = vitesse locale de déplacement du circuit dans $\mathcal{R}$

• Expérimentalement, on observe l'apparition d'un courant (en l'absence de tout générateur) si $\mathcal{R}$ est mobile (translation, rotation, déformation) dans un champ magnétique stationnaire ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$)

• Interprétation : les charges du circuit reçoivent de la part des sources de $\vec{B}$ un certain travail (dit travail générateur) $\delta \mathcal{E}_g$ (pour δq)

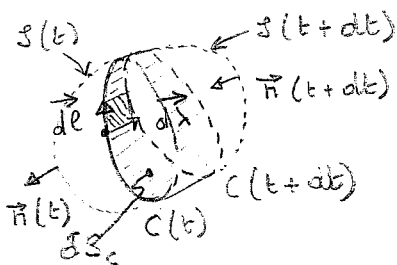
• Définition de la f.ém (générale) $e \equiv \frac{\delta \mathcal{E}_g}{\delta q}$ (en V)

• Expression de e :

$\delta \mathcal{E}_g = \oint \delta \vec{F} \cdot d\vec{l}$ où $\delta \vec{F}$ est la force susceptible de mettre en mouvement des charges électriques, soit $\delta \vec{F} = \delta q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ ($\vec{u}$ = déplacement le long du circuit). En régime stationnaire pour un circuit fermé $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_A = 0$ (circulation de $\vec{E}$ conservative) (Remarque : $\oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0$ car $\vec{u} \parallel d\vec{l}$. De toute façon ne peut même en mouvement les charges !). Donc, en divisant par δq :

$$e = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (\vec{v} \times \vec{B} \text{ est parfois appelé "champ électromoteur", mais notion "dangereuse"})$$

I.2. Expression en fonction du flux

$$e = \frac{1}{dt} \oint_C (d\vec{\lambda} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{dt} \oint_C \underbrace{(d\vec{\lambda} \times d\vec{l}) \cdot \vec{B}}_{\text{aire } d^2 S_c \cdot \vec{n}_c}$$

du parallélogramme construit sur $(d\vec{\lambda}, d\vec{l})$

$$e = - \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot \vec{n}_c d^2 S_c = - \frac{1}{dt} \oint_C \delta^2 \Phi_c = - \frac{\delta \Phi_c}{dt}$$

$\delta \Phi_c$ = flux du champ magnétique à travers la surface δS_c balayée par C au cours de son déplacement pendant dt (flux "coupé")

La surface $\mathcal{V} = [S(t) \cup \delta S_c \cup S(t+dt)]$ est fermée et donc $\Phi_{\text{total}} = 0$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n}_{ex} dS = \int_{S(t)} \vec{B} \cdot \vec{n}(t) dS + \delta \Phi_c - \int_{S(t+dt)} \vec{B} \cdot \vec{n}(t+dt) dS = 0 \quad (\vec{B} \text{ stationnaire})$$

Soit $\Phi(t) + \delta \Phi_c - \Phi(t+dt) = 0 \Rightarrow \delta \Phi_c = \Phi(t+dt) - \Phi(t) = d\Phi =$ variation du flux de $\vec{B}$ à travers C .

On obtient $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ (Loi de Faraday)

Remarque : valable même si $\vec{B}(t)$ à condition que la circuit soit de composition matérielle constante (cf leçon 18). *

I.3. Courant induit - Loi de Lenz

Le travail générateur est entièrement compensé par celui des forces de "frottement" ou de "collisions" (effet Joule):

$$\delta\mathcal{E}_g + \delta\mathcal{E}_f = 0 \text{ soit } e_g \delta q - Ri^2 dt = 0 \text{ avec } i = \frac{\delta q}{dt}$$

d'où $i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$; si $\Phi \uparrow$ $i < 0$ (loi de Lenz)

Remarque : localement, dans le conducteur mobile, la loi d'Ohm s'écrit $\vec{J} = \gamma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$, soit de manière intégrale $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = Ri - e$

Si le circuit comprend un générateur de fem E_g , on a $e + E_g = Ri$,
Soit $i = \frac{E_g}{R} + i_{\text{induit}}$.

* si le circuit n'est pas de composition matérielle constante (barres sur des rails, générateur unipolaire), il fait revenir à $e = \oint_C (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$

II Applications

II.1. Freinage par induction

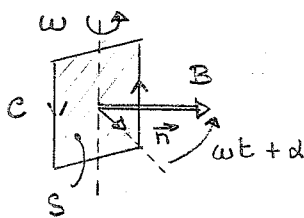
Le circuit (C) parcouru par le courant induit i , mobile dans $\vec{B}$ est soumis à la force de Laplace: $d\vec{F}_L = i d\vec{l} \times \vec{B}$. Le travail des forces s'exerçant sur le circuit (translation, rotation, déformation) vaut:

$$\delta\mathcal{E}_L = \oint_C d\vec{F}_L \cdot d\vec{x} = i \oint_C (d\vec{l} \times \vec{B}) \cdot d\vec{x} = i \oint_C (d\vec{x} \times d\vec{l}) \cdot \vec{B} = i d\Phi$$

$\delta\mathcal{E}_L = \frac{e i}{R} d\Phi = -\frac{1}{R} \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 dt \Rightarrow \mathcal{P}_L \equiv \frac{\delta\mathcal{E}_L}{dt} = -\frac{1}{R} \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 < 0$: la puissance des forces de Laplace est toujours résistive = principe du freinage électromagnétique (freins "électriques", aiguilles d'appareils magnétoélectriques)

II.2. Générateur de tension alternative

Principe: spire en rotation (pulsation ω) dans un champ uniforme



$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S = BS \cos(\omega t + \alpha)$$

$$e = BS\omega \sin(\omega t + \alpha) = e_m \sin(\omega t + \alpha)$$

Exemple: 1000 spires, $S = 10 \text{ cm}^2$, $B = 1 \text{ T}$, $\omega = 314 \text{ rad/s}$

$$e_{\text{eff}} = \frac{10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 314}{\sqrt{2}} \approx 220 \text{ V}$$

Application: production d'électricité (EDF)

II.3. Génération de courant continu

On ajoute des contacts glissants qui permettent de redresser le courant $e = e_m |\sin \omega t|$. Dans la pratique, les enroulements sont sophistiqués de manière à fournir $e_i \approx E = \text{cte}$.

Conclusion: ces phénomènes ne constituent qu'un cas particulier des phénomènes d'induction qui existent même si le circuit est fixe dès lors que le champ $\vec{B}$ est variable (précisable ici, en se plaçant dans le référentiel R' où C est fixe). En particulier les phénomènes d'auto-induction ne sont pas toujours négligeables dans les générateurs à circuit mobile ("réaction d'induit"). Soulignons l'importance pour les applications. On aurait pu évoquer aussi le microphone à bobine mobile comme autre exemple de transduction mécanosélectrique.

ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE DANS LE VIDE

VECTEUR DE POYNTING; DENSITE D'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE (On envisagera l'application aux ondes planes et au rayonnement) (PC)

Introduction

La notion d'énergie associée au champ électromagnétique ($\vec{E}, \vec{B}$) apporte un éclairage nouveau sur le concept habituel d'énergie en physique classique, généralement lié à un support matériel (énergie cinétique, énergie potentielle). Elle est ici définie dans le vide (donc en l'absence de support matériel). Sa non-conservation est fondamentale pour les applications (générateurs et récepteurs). Sa propagation permet le transfert d'informations (domaine spectral très large; l'optique ne constituant qu'un cas particulier).

I Théorème de Poynting - Bilan d'énergie électromagnétique

I.1. Théorème de Poynting

Force agissant sur une charge placée dans ($\vec{E}, \vec{B}$): $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ Lorentz

Travail élémentaire $\delta \mathcal{E} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \vec{v} \cdot \vec{E} dt$ (la force magnétique ne "travaille pas"). Pour l'ensemble des charges $dq = \rho dV$ contenues dans un élément de volume quelconque $\delta^3 \mathcal{E} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} dV dt = \vec{J} \cdot \vec{E} dV dt$, d'où la puissance volumique des forces électromagnétiques: $\frac{\delta \mathcal{E}}{dV} = \frac{\delta^3 \mathcal{E}}{dV dt} = \vec{J} \cdot \vec{E}$

Le théorème de Poynting permet d'exprimer $\vec{J} \cdot \vec{E}$ en fonction uniquement du champ ($\vec{E}, \vec{B}$) en utilisant les équations de Maxwell:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(MF)} \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{(MG)} \quad \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho \quad \vec{\text{rot}}(\frac{\vec{B}}{\mu_0}) - \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} = \vec{J} \quad \text{(M.A)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{J} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}}{2}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B} \\ \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} + \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) \end{array}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}) + \text{div} \vec{R} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{R} \equiv \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (\text{vecteur de Poynting})$$

(il n'est défini que par sa divergence donc à un rotationnel près!)

I.2. Bilan global d'énergie électromagnétique

En intégrant sur un volume V fixe, quelconque, délimité par S :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}) dV + \oint_S \vec{R} \cdot \vec{n}_{\text{ex}} dS = - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

↑
Th. de Green-Ostrogradsky

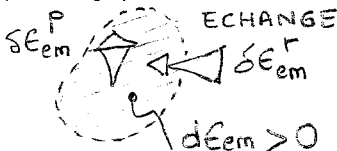
• Bilan

$d\mathcal{E}_{\text{em}} = \delta \mathcal{E}_{\text{em}}^r + \delta \mathcal{E}_{\text{em}}^p$: bilan de la grandeur extensive $\mathcal{E}_{\text{em}}$

$$\mathcal{E}_{\text{em}} \equiv \int_V (\epsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}) dV \quad \delta \mathcal{E}_{\text{em}}^r = dt \oint_S \vec{R} \cdot (-\vec{n}_{\text{ex}}) dS = \text{énergie reçue par le système pendant } dt \text{ (comptée positivement si réellement reçue: convention "thermo")}$$

$$\delta \mathcal{E}_{\text{em}}^p = -dt \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \text{énergie produite par le système pendant } dt = -\delta \mathcal{E} = -\text{travail des charges de } V \text{ sous l'action du champ } (\vec{E}, \vec{B})$$

CREATION



• Puissance produite

$$\frac{\delta \mathcal{E}_{\text{em}}^p}{dt} = - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = -P_{\text{dissipée}} \neq 0 : \text{NON-CONSERVATION DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \frac{\delta \mathcal{E}_{\text{em}}^p}{dt} > 0 : \text{générateur d'énergie électromagnétique} \\ \text{Si } \frac{\delta \mathcal{E}_{\text{em}}^p}{dt} < 0 : \text{récepteur d'énergie électromagnétique} \end{array} \right. \quad (P_{\text{dissipée}} > 0 \text{ } \left\{ \begin{array}{l} \text{moteur} \\ \text{résistor} \end{array} \right.)$$

• Puissance rayonnée

$$-\frac{\delta \mathcal{E}_{\text{em}}^r}{dt} = P_{\text{ray}} = \oint_S \vec{R} \cdot \vec{n}_{\text{ex}} dS = \text{flux de } \vec{R} \text{ à travers } S$$

Le vecteur de Poynting $\vec{J}$ permet de déterminer (par son flux) les échanges d'énergie em

I.3. Bilan local d'énergie électromagnétique

Bilan global valable $\forall V$; en réduisant V aux limites de définition de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (grandeurs macroscopiques), on retrouve l'égalité de Poynting

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{R} = \sigma_{em} \quad \text{avec } W_{em} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{densité d'énergie électromagnétique}$$

$$\vec{R} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J}_{em} = \text{courant volumique d'énergie ém}$$

$\sigma_{em} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$ = taux de création d'énergie ém ; si $\sigma_{em} \neq 0$: non conservation locale de l'énergie qui est dissipée en une (ou crée à partir d'une) autre forme d'énergie (mécanique, thermique...) par l'intermédiaire des charges.

Remarque : les termes électrique $\epsilon_0 \frac{E^2}{2}$ et magnétique $\frac{B^2}{2\mu_0}$ ne sont pas en général séparables car $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont couplés (cf. eq^{ns} de Maxwell) sauf en régime stationnaire :

- énergie électrostatique $W_e = \epsilon_0 \frac{E^2}{2}$ (exemple : condensateur plan)
- énergie magnétostatique $W_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ (exemple : enroulement inductif)

II Propagation d'énergie électromagnétique dans le vide

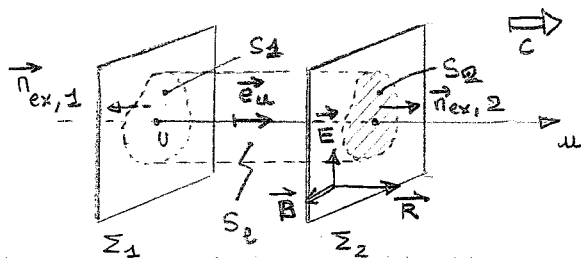
II.1. Conservation de l'énergie ém en l'absence de charges

En l'absence de sources $\vec{J} = \vec{0}$, $\sigma_{em} = 0$ et $\text{div } \vec{R} = 0$, l'énergie ém se conserve :

- globalement $d\epsilon_{em} = \text{div } \vec{R}$: l'énergie ne peut qu'être échangée

$$P_{ray} = -\frac{d\epsilon_{em}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{em} dV$$
 (analogie avec la conservation globale de la charge électrique $I = -\frac{dQ}{dt}$)
- localement $\frac{\partial W_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{R} = 0$ (analogie avec $\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) $\vec{R} = \vec{J}_{em}$

II.2. Onde plane progressive



- Onde plane progressive

$\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}_u$ forment un trièdre direct

$E = cB$ (en tout point, en tout instant)

E a la même valeur en tous les points d'un plan d'onde Σ ($\perp \vec{e}_u$) au même instant

- densité d'énergie

$$W_{em} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \epsilon_0 E^2 \quad (\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1)$$

- Courant volumique d'énergie (vecteur de Poynting)

$$\vec{J}_{em} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times (\vec{e}_u \times \frac{\vec{E}}{c}) = \epsilon_0 c E^2 \vec{e}_u = W_{em} \vec{e}_u$$

l'énergie se propage selon $\vec{e}_u$ à la vitesse c .

- Conservation de l'énergie d'une onde plane progressive : bilan global pour le volume V délimité par $(S_1 \cup S_2 \cup S_0)$:

$$\frac{d\epsilon_{em}}{dt} = \int_{S_1} \vec{R}_1 \cdot \vec{n}_{1,ex} dS + \int_{S_2} \vec{R}_2 \cdot \vec{n}_{2,ex} dS, \quad \vec{n}_{1,ex} = -\vec{n}_{2,ex} = -\vec{e}_u; \vec{R}_1 \cdot \vec{e}_u = R$$

$$R = \text{cte sur } \Sigma \Rightarrow \frac{d\epsilon_{em}}{dt} = -R_1 S + R_2 S$$

II.3. Onde plane progressive périodique (T)

On intègre au cours du temps sur une durée $\tau \gg T$ (important pour les applications : un détecteur "quadratique" effectue une moyenne sur sa durée de réponse : œil, plaque photo, caméra CCD, photomultiplicateur...)

$$\left\langle \frac{d\epsilon_{em}}{dt} \right\rangle_\tau = 0 \quad \left\langle \vec{J}_{em} \right\rangle_\tau = \left\langle W_{em} \right\rangle_\tau \vec{e}$$

Intensité de l'onde :

$$\left\langle R_1 \right\rangle_\tau S = \left\langle R_2 \right\rangle_\tau S = I \quad \text{caractéristique de l'onde en tout point (en W)}$$

$$I = \epsilon_0 \left\langle E^2 \right\rangle_\tau S c \propto \left\langle E^2 \right\rangle_\tau$$

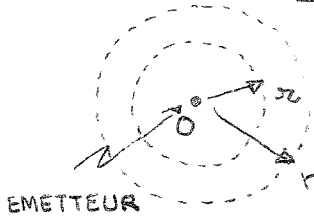
Exemple : onde monochromatique (faisceau laser de section S) polarisé rect

$$\left\langle E^2 \right\rangle_\tau = \left\langle E_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle_\tau = \frac{E_m^2}{2} \quad \text{et } I = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_m^2 c S$$

$$\text{A.N. } I = 1 \text{ W}, S = 1 \text{ mm}^2 \Rightarrow E_m = 27 \text{ kV/m}, B_m = 9 \times 10^{-5} \text{ T}$$

III. Rayonnement d'énergie électromagnétique

III.1. Émission



En O : source d'énergie électromagnétique émettant dans tout l'espace (ondes sphériques)

Conservation de l'énergie dans le volume compris entre r et r' , en moyenne dans le temps

$$r' \langle P_{\text{ray}} \rangle_t = \langle R \rangle_t 4\pi r^2 = \dot{U}_t \quad \langle R \rangle_t \sim \frac{1}{r^2} \text{ et donc } E_m \sim \frac{1}{r}$$

Puissance moyenne de l'émetteur.

|| si émission isotrope

Dans le cas d'un dipôle oscillant, l'émission n'est pas isotrope: $\langle R(\theta) \rangle_t$ constitue le diagramme de rayonnement (cf. leçon 24)

Dans le cas d'antennes, on essaie d'obtenir une émission directive, pour concentrer le rayonnement dans des angles solides limités.

III.2. Réception

Processus inverse de l'émission: l'énergie électromagnétique est convertie en courant (terme $-\vec{J} \cdot \vec{E}$), ensuite amplifiée.

Conclusion

L'énergie électromagnétique est associée au champ $(\vec{E}, \vec{B})$ et sa densité définie par $w_{em} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$.

Elle ne se conserve pas en présence de charges, ce qui permet de la générer ou de la transformer en une autre forme d'énergie (conducteurs électromécaniques, par exemple). Dans le domaine des communications, ceci est réalisé par des antennes.

Dans le vide, l'énergie se propage à la vitesse c .

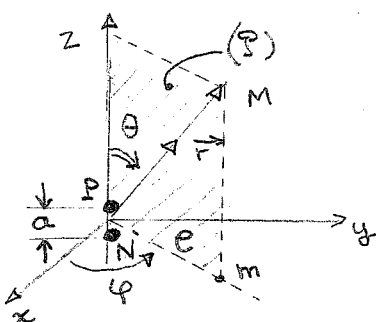
En fait, les phénomènes d'absorption, de dispersion, de diffusion, de réflexion, réfraction sont en prise en compte (terme $-\vec{J} \cdot \vec{E}$). Pour une émission libre, l'énergie décroît avec la distance. Pour toutes ces raisons, on préfère souvent canaliser la propagation de l'énergie, à basse fréquence par des conducteurs (réseau EDF), à haute fréquence (telecommunications) dans des fibres optiques. Néanmoins, dans certains cas (astronomie, communications par satellite), la propagation dans le vide reste incontournable.

Introduction

- Emission d'ondes électromagnétiques par des charges en mouvement = conséquence des équations de Maxwell (prévue par Hertz en 1880)
- Applications importantes : rayonnement des antennes (télécommunications), diffusion de la lumière par les atomes, rayonnement par des charges accélérées (synchrotron)
- Limites de l'étude : théorie classique ; dans le cas des systèmes microscopiques, l'étude relève de l'électrodynamique quantique.
- Etude généralement complexe, limitée ici au cas d'un dipôle électrique.

I. Potentiel et champ ém. créés par un dipôle oscillant

I.1. Potentiel "retardé" ; approximation dipolaire



$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c})}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{r}'$$

$\tau_p = \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c}$ = durée de propagation dans le vide du signal ém. entre la source et le point M d'observation : le potentiel est en retard de τ_p par rapport aux sources.

• sources = dipôle q en $P(0,0,\frac{a}{2})$, $-q$ en $N(0,0,-\frac{a}{2})$

oscillant : $i(t) = \frac{dq}{dt}$ (sens > 0 de N vers P) ; moment dipolaire $\vec{p} \equiv q a \vec{e}_z$

• Approximation dipolaire $a \ll r$ et donc $\|\vec{r} - \vec{r}'\| \approx r$

Remarque : la solution du potentiel retardé est déduit de l'équation :

$$\Delta(\vec{A} \text{ ou } V) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{A} \text{ ou } V) = -(\mu_0 \vec{j} \text{ ou } \frac{\rho}{\epsilon_0}) \text{ dans la jauge de Lorentz}$$

• Approximation des régimes quasi-stationnaires : $a \ll \lambda$ = longueur caractéristique de la variation spatiale de l'onde (longueur d'onde), et donc $i(t)$ est le même en tous les points du dipôle : $i(t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c}) \approx i(t - \frac{r}{c})$

I.2. Solution pour le potentiel ($\vec{A}, V$)

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0 a}{4\pi} \frac{i(t - r/c)}{r} \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dp}{dt} \bigg|_{t' = t - \frac{r}{c}} \vec{e}_z$$

$$\text{On note : } \dot{p} = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \dot{p} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial r} = -\frac{1}{c} \dot{p}$$

Calcul de V à partir de la condition de jauge de Lorentz : $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{p}}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} ; r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos\theta \left(\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc} \right)$$

I.3. Solution pour le champ ($\vec{E}, \vec{B}$)

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = B_\phi \vec{e}_\phi$: coordonnées cylindriques, $(\vec{OM}, P)$ = plan de symétrie

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = -\frac{\partial A_z}{\partial \phi} \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \left(\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc} \right) \vec{e}_\phi ; r = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{E} \begin{cases} E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\dot{p} \cos\theta \left(\frac{1}{r^3} + \frac{\dot{p}}{rc} \right) \\ E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \dot{p} \sin\theta \left(\frac{1}{r^3} + \frac{\dot{p}}{rc} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right) \end{cases}$$

En régime lentement variable (τ_p négligeable) on retrouve les mêmes expressions ($c \rightarrow \infty$)

En régime stationnaire $\dot{p} = 0, \ddot{p} = 0$

on retrouve le champ créé par le dipôle (cf 17) avec $\vec{B} = 0$

II Champ rayonné à grande distance par un dipôle oscillant

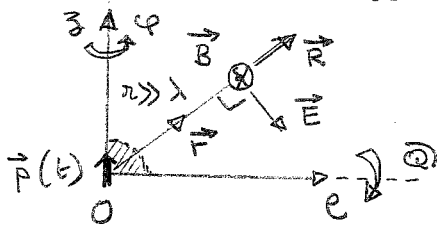
(C)

II.1. Approximation des grandes distances $r \gg \lambda$

$r = c \tau_p$, $\lambda = cT$ et donc $\tau_p \gg T$: le phénomène de propagation est déterminant
 $|\vec{p}| \sim \frac{|\dot{p}|}{\frac{1}{T}} : \frac{\ddot{p}}{c^2} \gg \frac{\dot{p}}{rc} \gg \frac{p}{r^2}$

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sin\theta \frac{\ddot{p}}{rc} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \frac{\ddot{p}}{rc^2} \vec{e}_\theta$$



$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad B = \frac{E}{c} \text{ en tout point, en tout instant}$$

$$\text{Onde TEM} \quad \vec{B} = \vec{e}_r \times \frac{\vec{E}}{c}$$

$$E, B \sim \frac{1}{r} : \text{rayonnement à grande distance (en régime stationnaire } E \sim \frac{1}{r^2} \text{)}$$

$$E, B \sim \ddot{p} = q\ddot{u} \quad \ddot{u} = \text{accélération de la charge}$$

Localement, pour un détecteur de dimension $\ll \lambda \ll r$: onde localement plane

III.2. Dipôle oscillant harmoniquement

$$q = q_m \cos \omega t, \quad p = p_m \cos \omega t \Rightarrow \text{notation complexe } p = p_m \exp -i\omega t$$

$$\dot{p} = -i\omega p_m \exp -i\omega t; \quad \ddot{p} = -\omega^2 p_m \exp -i\omega t$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \frac{-\omega^2 p_m}{rc^2} \exp i(kr - \omega t) \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$$

III Puissance rayonnée

III.1. Diagramme de rayonnement

Vecteur de Poynting $\vec{R} \equiv \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c E_\theta^2 \vec{e}_r = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{(\ddot{p})^2}{r^2} \sin^2\theta$
 $\Rightarrow$ rayonnement non isotrope ($\sin^2\theta$) $\sim \frac{1}{r^2} \sim (\text{accélération})^2$

$r = \text{cte}$, à t donné $\vec{R} = \vec{R}_0 \sin^2\theta$: le rayonnement est nul selon

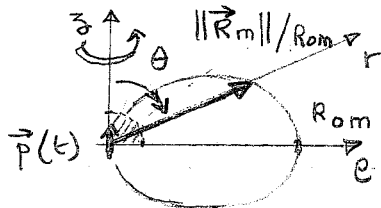


Diagramme de rayonnement

l'axe du dipôle ($\theta = 0$ ou π)
 maximal dans le plan $\perp$ axe du dipôle ($\theta = \pi/2$).

En régime sinusoïdal ($\omega, \vec{k}$)

$$\langle \dot{p} \rangle_t = -\frac{\omega^2 p_m}{2}; \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\langle \vec{R} \rangle_t = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4 p_m^2}{r^2} \sin^2\theta \vec{e}_r : \text{varie comme } \omega^4 \Leftrightarrow \text{comme } \frac{1}{\lambda^4}$$

III.2. Puissance totale rayonnée

$$P_{\text{ray}} \equiv \oint \vec{R} \cdot \vec{n} dS \quad S = \text{sphère de rayon } r \quad P_{\text{ray}} = \frac{\omega^4 p_m^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle_t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 p_m^2}{3c^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a^2 \langle \ddot{u}^2 \rangle_t}{3c^3} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \frac{I_m^2}{2}$$

$$\sim \omega^4$$

$$\sim \langle \text{accél}^2 \rangle$$

$$= Z_{\text{ray}} I_{\text{eff}}^2; \quad Z_{\text{ray}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 377 \Omega$$

$\langle P_{\text{ray}} \rangle_t$ ne dépend pas de r (conservation de l'énergie)
 mais est directionnelle (la moitié de la puissance est rayonnée dans $\Delta\theta = \pi/2$)

IV Applications

IV.1. Echelle macroscopique : antennes

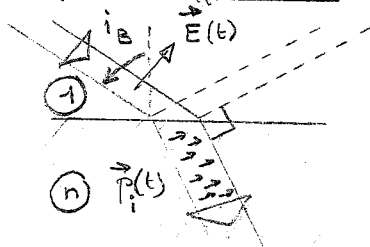
L'approximation dipolaire n'est plus valable $a \sim \lambda$: on décompose la source en une somme de dipôles élémentaires et on utilise le principe de superposition

- Antenne demi-onde : plus directive qu'un simple dipôle
- Réseau d'antennes : permet d'accroître la directivité

IV.2. Echelle microscopique : optique des milieux matériels

- Emission de rayonnement : modèle classique de "électron" élastiquement lié" : $\vec{p} = -e\vec{u}$ (en fait nécessite d'une approche quantique $\omega_0 = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}$)
- Rayonnement de freinage : émission par des charges brusquement décélérées dans la matière ("Bremsstrahlung") ou fortement accélérées (rayonnement synchrotron) jusqu'au domaine X
- Propagation, réflexion, réfraction, diffusion : les électrons soumis à l'action du champ électrique d'une onde, se comportent comme des dipôles oscillants (approximation dipolaire électrique, modèle de "électron élastiquement lié"). L'interférence constructive entre toutes les ondes réémises conduit à un effet très directionnel (notion d'indice optique)

Exemple d'application : incidence brewstérienne



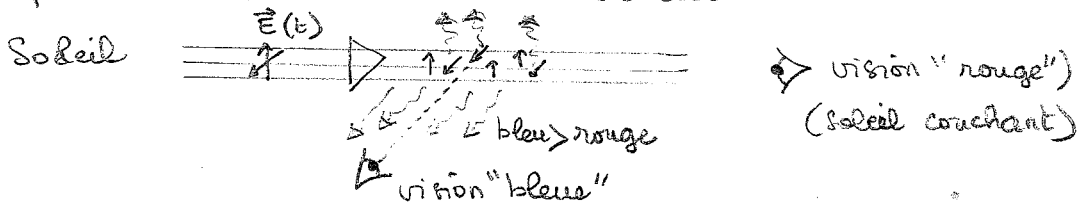
pas de faisceau réfléchi si $\vec{E}_i$ dans le plan d'incidence pour i_B ($\tan i_B = n$) car la direction réfléchie est selon l'axe perpendiculaire à ceux des dipôles induits

- Diffusion $m\ddot{u} = -m\omega_0^2 u - eE$ (régime forcé pour un électron élastiquement lié)
 $\ddot{u} = -\omega^2 u$; $p = -eu$
 $p_m(\omega) = \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} E_m$ d'où $\langle S \rangle_{\pm} = \frac{e^4}{12\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \frac{\omega^4 E_m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$

3 domaines : $\omega \ll \omega_0$ $\langle S \rangle_{\pm} \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}$ diffusion Rayleigh
 $\omega \simeq \omega_0$ diffusion résonnante
 $\omega \gg \omega_0$ $\langle S \rangle_{\pm} \sim \text{cte}$ diffusion Thomson

Exemple d'application : ω_0 dans le domaine UV (atomes)

Dans le domaine visible, le bleu est plus diffusé que le rouge
 $\Rightarrow$ explication de la couleur bleue du ciel



Conclusion

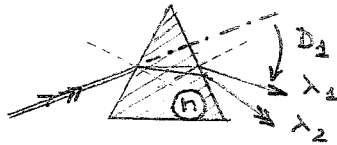
Rappel des résultats importants :

- loin du dipôle, localement, structure d'une onde plane
- puissance émise $\sim \frac{1}{r^2}$; $\sim \omega^4$; $\langle \text{accélération}^2 \rangle$; $\sin^2 \theta$
- applications : antennes et optique des milieux

Limites : approche classique (les interactions lumière-matière relèvent du domaine quantique, pour la description de l'atome : niveaux d'énergie, et pour la description du champ : photons)

Nécessité de prendre en compte les effets d'amortissement (durée de vie finie de l'émission).

Introduction : La réponse d'un milieu matériel à une excitation extérieure n'est jamais instantanée (inertie, amortissement des processus microscopiques) : il en résulte les phénomènes de dispersion et d'absorption qui perturbent la propagation d'un signal (distorsion et atténuation). On envisage ici le cas d'un signal électromagnétique dans un milieu diélectrique linéaire, compte tenu de son importance pour les applications (composants, fibres optiques ; communications). Dans ce cas, le phénomène de dispersion est aisé à mettre en évidence expérimentalement avec un prisme :



Déviation dépend de la longueur d'onde $\Rightarrow$
 $n(\lambda)$: l'indice dépend de λ (plus élevé pour le violet que pour le rouge)

I. Propagation dans un milieu dispersif

I.1. Equation d'onde

Milieu linéaire, homogène et isotrope : la réponse est proportionnelle à la cause, indépendante du point considéré et de la direction.

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \underbrace{\epsilon(t-t')}_{\text{fonction de réponse}} \vec{E}(\vec{r}, t') dt'$$

(déplacement)

On n'intègre que sur les instants antérieurs (principe de causalité)

Analyse harmonique : on s'intéresse au cas d'un signal harmonique (pulsation ω)

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \exp -i\omega t \Rightarrow$ réponse en régime "forcé" $\vec{D} = \vec{D}_0(\vec{r}) \exp -i\omega t$
avec $\vec{D}_0(\vec{r}) = \epsilon(\omega) \vec{E}_0(\vec{r})$: $\epsilon(\omega)$ caractérise entièrement la réponse du milieu diélectrique (= "constante" ou "fonction" diélectrique = susceptibilité complexe)

$$\epsilon(\omega) = \underbrace{\epsilon'(\omega)}_{\substack{\text{dépend de } \omega \\ \text{(dispersion)}}} + i \underbrace{\epsilon''(\omega)}_{\substack{\text{induit un déphasage, responsable du phénomène} \\ \text{d'absorption}}}$$

On se limite au cas d'une propagation unidimensionnelle $\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{E}_0(z)$
d'une zone de transparence $\epsilon''(\omega) \ll 1$ (absorption négligeable)

A partir des équations de Maxwell, on établit l'équation d'onde :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \otimes (\vec{\nabla} \otimes \vec{E}_0) &\equiv \vec{\nabla} \text{grad} (\text{div } \vec{E}_0) - \Delta \vec{E}_0 \\ \text{div } \vec{D}_0 &= 0 \Rightarrow (\epsilon \neq 0) \text{ div } \vec{E}_0 = 0 \\ \vec{\nabla} \otimes \vec{E}_0 &= i\omega \vec{B}_0, \quad \vec{\nabla} \otimes \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} + i\omega \vec{D}_0 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Delta \vec{E}_0 + \omega^2 \epsilon \mu_0 \vec{E}_0 &= \vec{0} \\ \epsilon &\equiv \epsilon_0 \epsilon_r & \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \epsilon_0 \mu_0 c^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \vec{E}_0}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \vec{E}_0 = \vec{0}$$

$\rightarrow$ traduit entièrement la réponse du milieu (constante diélectrique relative) par rapport au vide ($\epsilon_r = 1$)

I.2. Relation de dispersion

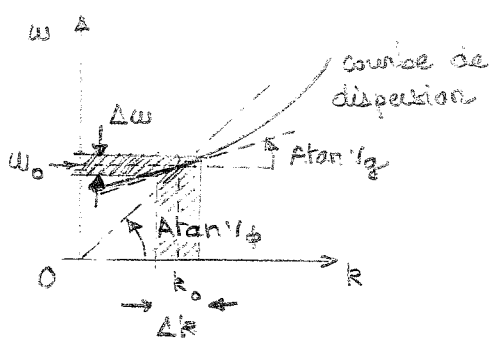
On cherche une solution sous forme d'onde plane progressive selon Oz :

$$\vec{E} = \vec{E}_0(z) \exp -i\omega t = \vec{E}_m \exp i(kz - \omega t) \Rightarrow \Delta = -k^2$$

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r) \vec{E}_m = \vec{0} \Rightarrow \omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r(\omega)}} k \quad \text{relation de dispersion}$$

On définit l'indice optique $n \equiv \sqrt{\epsilon_r}$ d'où $\omega = \frac{c}{n(\omega)} k$: fonction en général non linéaire $\Leftrightarrow$ milieu dispersif.

Vitesse de phase : $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}$ dépend de ω



Exemples : velle dans le domaine visible

Formule de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

• onde dans un plasma

$$n = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \quad \omega_p = \text{pulsation plasma}$$

• onde dans un guide

$$n = \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \quad \omega_c = \text{pulsation de coupure}$$

II. Paquet d'ondes - Vitesse de groupe

II.1. Notion de paquet d'ondes

Nécessités physiques : • le concept d'onde plane monochromatique n'est pas réaliste (durée de vie finie ; extension du plan d'onde limitée)

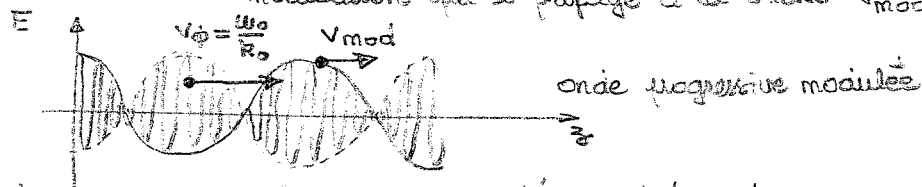
• Ne véhiculer aucune information ; il est nécessaire de moduler, par exemple en fréquence ($\Delta\omega$ autour d'une "porteuse" de pulsation ω_0)

Première approche : superposition de 2 OPPH de pulsations voisines

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} ; \omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} ; \Delta\omega \ll \omega_0 ; E_{m1} = E_{m2} = E_m ; \text{en phase}$$

$$\begin{aligned} E(z,t) &= E_m [\exp i(k_1 z - \omega_1 t) + \exp i(k_2 z - \omega_2 t)] \\ &= 2E_m \cos\left(\frac{\Delta k}{2} z - \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \exp i(k_0 z - \omega_0 t) \quad \text{avec } k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2} \end{aligned}$$

modulation qui se propage à la vitesse $v_{\text{mod}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$



Généralisation : paquet d'OPPH de pulsations voisines de ω_0 , en phase :

$$E(z,t) = \int E_m(k) \exp i(kz - \omega t) dk$$

En développant la relation de dispersion autour du point (ω_0, k_0)

$$\omega \approx \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 (k - k_0) \equiv v_\phi k_0 + v_g (k - k_0) \quad \text{en posant } v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega=\omega_0}$$

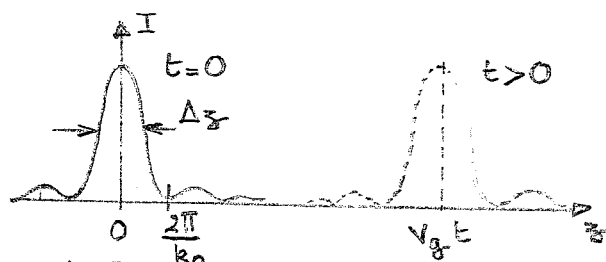
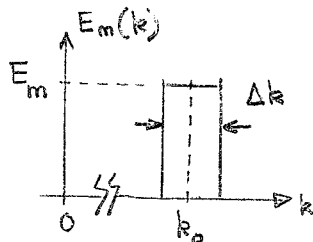
$$\text{En posant } k' = k - k_0, \quad E = \exp i k_0 (z - v_\phi t) \int E_m(k') \exp i k' (z - v_g t) dk'$$

II.2. Vitesse de groupe

Le paquet d'onde se déplace dans son ensemble (si l'on "intègre" sur la variation rapide à la pulsation ω_0) avec la vitesse $v_g \equiv$ vitesse de groupe

En définissant l'intensité associée : $I \equiv E E^* = |g(z - v_g t)|^2$, la vitesse de groupe s'identifie à la vitesse du signal.

Exemple : paquet d'ondes rectangulaire $k \in [k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}]$; $E_m(k) = E_m = \text{cte}$



$$I = (E_m \Delta k)^2 \left\{ \frac{\sin[\Delta k (z - v_g t)/2]}{\Delta k (z - v_g t)/2} \right\}^2$$

Le paquet d'onde a une étendue spatiale limitée $\Delta z \approx \frac{2\pi}{\Delta k}$

onde monochromatique $\Delta k = 0 \Rightarrow$ extension infinie

En un endroit donné, le signal a une intensité notable pendant une durée finie $\Delta t \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega}$. L'intensité totale du signal est finie (aire de la courbe)

II.3. Applications

Formule de Rayleigh (relation entre v_g et v_ϕ)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_\phi k)}{dk} = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda} = \frac{v_\phi}{1 - \lambda \frac{dn}{n d\lambda}}$$

$$\frac{dn}{d\lambda} (\text{verre}) \approx 8 \times 10^{-5} \text{ nm}^{-1} \quad v_g \approx v_\phi = \frac{c}{n}$$

Pour les communications par fibres optiques, il faut minimiser la dispersion tout en restant dans une zone de transparence (minimiser aussi l'absorption) $\Rightarrow \lambda = 1,55 \mu\text{m}$

Remarque : dans le développement limité de $\omega(k)$, on a négligé les termes d'ordres supérieurs qui conduisent à un étalement du paquet d'ondes au cours de la propagation.

- Seule la vitesse de groupe a une signification physique (vitesse du signal) : en revanche v_ϕ peut être supérieur à c (onde plasma, guide d'onde)
- la dispersion est qualifiée d'anormale si $dn/d\omega < 0$; la vitesse de groupe ne peut pas être toujours définie (zones d'absorption)

Conclusion : Le phénomène de dispersion conduit à une dépendance de la vitesse de phase d'une onde en fonction de la pulsation. Pour un signal composé de plusieurs ondes de pulsations groupées autour d'une valeur centrale, le concept de paquet d'ondes est alors utile ; celui-ci peut être identifié au signal ; il se propage dans son ensemble avec la vitesse de groupe $v_g = d\omega/dk$, où $\omega = f(k)$ est la relation de dispersion.

La dispersion est en général un phénomène gênant pour une transmission correcte de l'information et on cherche à la minimiser. C'est ainsi qu'on peut essayer de compenser le phénomène de dispersion par un effet de non linéarité pour générer des modes "solitons" qui se propagent sans déformation.

Le phénomène de dispersion a été présenté dans le cas d'ondes électromagnétiques dans un milieu matériel, mais ce n'est un phénomène plus général qui affecte la propagation de tout type d'ondes (acoustiques, électriques, mécaniques...)

REFLEXION ET REFRACTION D'UNE ONDE PLANE PROGRESSIVE HARMONIQUE POLARISEE RECTILINEMENT A L'INTERFACE ENTRE DEUX DIELECTRIQUES LHI DANS LE CAS DE L'INCIDENCE NORMALE

(PC)

Introduction : La propagation de l'information (signal optique) dans un milieu matériel linéaire, homogène et isotrope (donc caractérisé par un indice scalaire n , constant, supposé réel : pas d'absorption) est perturbée à l'interface de celui-ci (réflexion et réfraction).

L'étude est limitée au cas d'une onde plane harmonique ($\vec{E}, \omega$), mais tout signal peut être représenté comme une combinaison linéaire de telles ondes (Fourier). De même, tout état de polarisation est décomposable en une combinaison linéaire de deux états de polarisation rectilignes. Enfin, le cas de l'incidence normale correspond en pratique (instruments d'optique) au plus utilisé (approx. de Gauss).

I. Position du problème - Symétries

I.1. Rappel : OPFH dans un diélectrique LHI

Source : émet une onde du type (notation complexe)

$$\vec{E} = \vec{E}_m \vec{e}_u \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

constante $\uparrow$ direction fixe (polarisation rectiligne)

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_k \text{ selon la direction fixe de propagation}$$

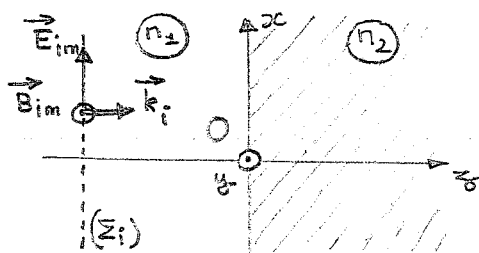
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Milieu LHI : caractérisé par l'indice n : $\omega = \frac{c}{n} k$ (relation de dispersion)

$$\omega = c k_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \text{ (dans le vide)} \quad k = k_0 n \text{ et } \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

$$\text{Onde TEM : } \vec{e}_u \perp \vec{e}_k ; \quad \vec{B} = \vec{k} \times \frac{\vec{E}}{\omega} = n \frac{\vec{E}}{c} \vec{e}_k \times \vec{e}_u$$

I.2. Symétries du problème. Relations de sautoz



Système = "source + milieux"

$\rightarrow$ impose $\omega, \vec{e}_u, \vec{e}_k$ et E_m

Invariance par translation selon Ox et Oy :

$$\vec{E} = \vec{E}(z, t)$$

Tout plan parallèle à Oxz est plan de symétrie

$$\vec{E} = E(z, t) \vec{e}_x ; \quad \vec{B} = B(z, t) \vec{e}_y$$

L'interface (plan $z=0$) étant immobile et les milieux linéaires, la pulsation ω est imposée par la source : $\vec{E} = \vec{E}_0(z) \exp -i\omega t$ ($\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$)

L'équation d'onde s'écrit donc :

$$\frac{d^2 E_0(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(z) E_0(z) = 0, \text{ avec } n(z < 0) = n_1 \text{ et } n(z > 0) = n_2$$

En tout point, la structure du champ impose que la composante tangentielle de $\vec{E}$ et de $\vec{H}$ (donc de $\vec{B}$ si les milieux sont non magnétiques et sans courant de surface) soient continues :

$E_0(z)$ continue

et $B(z)$ continue

$$\text{rot } \vec{E} = i\omega \vec{B} \text{ (M.F.)} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_0(z) \text{ continue} \\ \text{et } B(z) \text{ continue} \end{array} \right\} \frac{dE_0}{dz} \text{ continue}$$

II. Facteurs de réflexion et de transmission en amplitude

II.1. Solution générale de l'équation d'onde

Dans le milieu 1 ($z < 0$) ; on pose $k_1 = \frac{\omega}{c} n_1$ ($k_1 = k_0 n_1 > 0$)

$$E_{01}(z) = \underbrace{A \exp i k_1 z}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{B \exp -i k_1 z}_{\text{onde réfléchie}}$$

$k_i = k_1$; $A = E_{im}$

$k_r = -k_1$; $B \equiv r E_{im}$

(r : facteur de réflexion en amplitude $r = r \exp i\theta_r$; θ_r : déphasage à la réflexion)

Dans le milieu 2 ($n_2 > 0$), on pose $k_2 = \frac{\omega}{c} n_2$ ($k_2 = k_0 n_2 > 0$)

$$E_{02}(z) = \underbrace{C \exp i k_2 z}_{\text{onde transmise}} + \underbrace{D \exp -i k_2 z}_{\text{sans signification physique (D=0 car pas de source dans le milieu 2)}}$$

$k_t = k_2$; $C \equiv t E_{im}$ (t : facteur de transmission en amplitude)

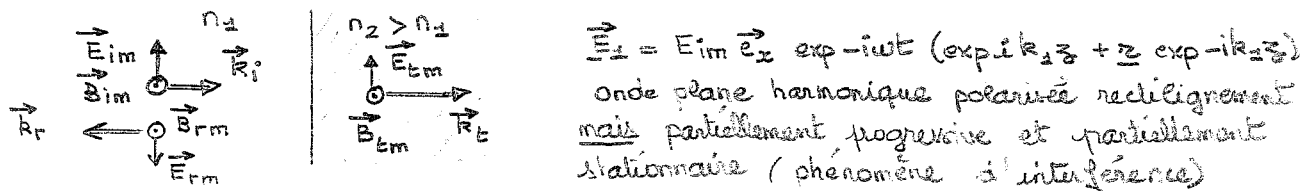
$$t = t \exp i \theta_t; \theta_t \text{ déphasage à la transmission}$$

Les équations de Maxwell prédisent l'existence d'une onde réfléchie et d'une onde transmise; interprétation microscopique: les dipôles induits par $\vec{E}_i$ rayonnent de manière cohérente dans les deux milieux et émettent $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$

II.2. Evaluation de r et t

Les relations de passage en $z=0$ donnent $1+r=t$ et $k_1(1-r)=k_2 t$
d'où: $r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$

$r < 0$ si $n_2 < n_1$: déphasage de π lors du passage à un milieu plus réfringent (exemple air $\rightarrow$ verre); pas de déphasage à la transmission



III. Facteurs de réflexion et de transmission en énergie

III.1. Energie associée à une onde; définitions de R et T

Pour une OPPH: $\vec{R} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = n \epsilon_0 c E^2 \vec{e}_k$; puissance moyenne rayonnée à travers une surface S du plan de l'interface: $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} n \epsilon_0 c E_m^2 S$

Facteur de réflexion en énergie $R \equiv -\frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle}$; et de transmission $T \equiv \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle}$

III.2. Evaluation de R et T. Bilan énergétique

$$R = \frac{n_1}{n_2} \frac{E_{rm}^2}{E_{im}^2} = r^2 \quad T = \frac{n_2}{n_1} \frac{E_{tm}^2}{E_{im}^2} = \frac{n_2}{n_1} t^2$$

$\rightarrow$ l'énergie ne se propage pas à la même vitesse (c/n) dans les deux milieux

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad T = 1 - R: \text{traduit la conservation de l'énergie électromagnétique}$$

$0 < R < 1$: la réflexion et la transmission ne sont jamais totales ($n_1 \neq n_2$)

III.3. Application numérique

air / verre ($n \approx 1,5$) $R = 4\%$ (air $\rightarrow$ verre ou verre $\rightarrow$ air) $\Rightarrow$ ouverture optique < ouverture géométrique
 air / eau ($n \approx 1,33$) $R = 2\%$

Pour une réflexion totale ou une transmission totale, il faut utiliser plusieurs interfaces (miroirs diélectriques et couches antireflets)

Conclusion:

- Apport de l'optique ondulatoire par rapport à l'optique géométrique: rend compte de l'existence des ondes réfléchies et transmises; permet de prévoir le phénomène de déphasage de π à la réflexion sur un milieu plus réfringent; permet de calculer les facteurs énergétiques

- La valeur de $R = [n_1 - n_2 / (n_1 + n_2)]^2$ (4% pour l'optique)

- Généralisation possible à tout type d'onde (acoustique, électromagnétique sur une ligne, de matière): l'indice joue un rôle analogue à l'impédance

- En incidence oblique, apparition de phénomènes nouveaux (sensibilité à la polarisation, angle d'incidence limite, angle de Brewster)

Introduction

Par l'intermédiaire des forces de Laplace s'exerçant sur un conducteur mobile (translation ou rotation), on peut réaliser une transduction électromécanique, c'est-à-dire un transfert d'énergie électromagnétique en énergie mécanique (récepteur d'énergie électromagnétique : haut-parleur, moteur) ou réciproquement (générateur : dynamo, alternateur). Le "pivot" de la transduction est le phénomène d'induction. Les applications, très nombreuses, relèvent de la science de l'électrotechnique.

I Rappels sur les phénomènes d'induction "mouvement"

I.1. Force électromotrice induite

$$e_i = \oint_C (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_C}{dt} \quad \vec{V} = \text{vitesse d'un point du circuit}$$

$\Phi_C = \text{flux "coupe" par le circuit pendant dt}$

Exemples : barreau sur des rails (moteur ou générateur linéaire)

spire tournante (moteur et générateur en rotation)

Expression du courant induit $i_i = \frac{e_i}{R}$ ($R = \text{résistance du circuit}$)

I.2. Force de Laplace

$$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

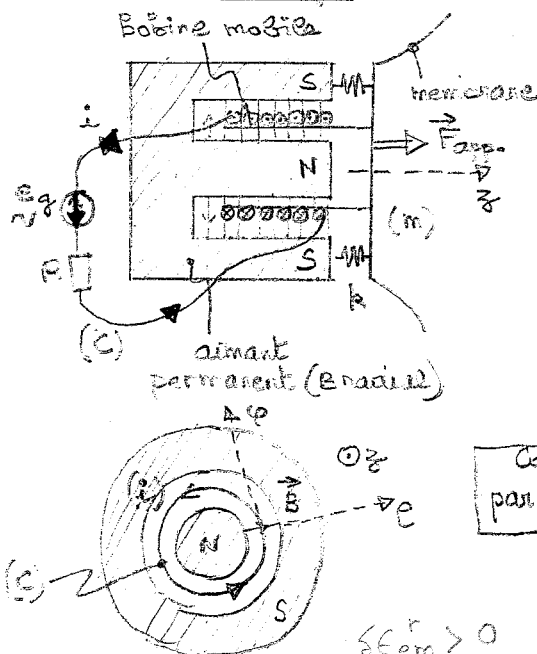
En translation : $\vec{F}_L = i \oint_C d\vec{l} \times \vec{B}$; en rotation $\vec{T}_L = i \oint_C d\vec{l} \times (\vec{r} \times \vec{B})$

Travail des forces de Laplace $\delta W_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} dt$; $\delta W_L = \vec{T}_L \cdot \vec{\Omega} dt$

→ le couplage entre les sources du champ électromagnétique et le circuit se font par la vitesse (mécanique) et l'intensité (électrique)

II. Système en translation : Haut-parleur électrodynamique

II.1. Principe



a) aspect mécanique

$$m \frac{dv}{dt} = \vec{F}_L - k \vec{v} + \vec{F}_{\text{moteur}} + \vec{F}_{\text{app.}} \quad (\vec{F}_{\text{moteur}} = -\vec{a} \vec{v})$$

$$\vec{F}_L = \oint_C i d\vec{l} \times \vec{B} = -B l i \vec{e}_z \quad (l = \text{longueur de l'enroulement})$$

$$m \frac{dv}{dt} + k v = F_{\text{moteur}} - B l i + F_{\text{app.}}$$

En multipliant par $v dt = dz$

$$d(\epsilon_c + \epsilon_p) = \delta W_{\text{moteur}} + \delta W_L + \delta W_{\text{app.}} \quad \delta \epsilon_m$$

$$\epsilon_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k z^2 \quad \delta W_L = -B l i v dt$$

b) aspect électrique

$$L \frac{di}{dt} + R i = e_g + e_i$$

$$e_i = - \frac{d\Phi_C}{dt} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = B l v$$

$$L \frac{di}{dt} = -R i + e_g + B l v$$

En multipliant par $i dt = dq$

$$d(\frac{1}{2} L i^2) = -R i^2 dt + e_g i dt + B l v i dt$$

$\epsilon_{\text{magnétique}} \rightarrow \text{Joule} \rightarrow \delta \epsilon_m \quad \delta W_{\text{conversion}}$

Haut-parleur : $e_g \neq 0, \vec{F}_{\text{app.}} = 0$
Microphone : $e_g = 0, \vec{F}_{\text{app.}} \neq 0$

$\delta \epsilon_m > 0$

I.2. Impédances mécanique, électrique et motrice

En régime sinusoïdal forcé : $F_{app} = F_m \exp j\omega t \Rightarrow V = V_m \exp j\omega t$

$$\underbrace{\left[a + j\left(m\omega - \frac{B^2}{\omega}\right) \right]}_{Z_{\text{mécanique}}} V_m = -B\ell \underline{I}_m + F_m$$

$$\underbrace{(R + j\omega L)}_{Z_{\text{électrique}}} \underline{I}_m = B\ell V_m - F_m$$

$$e_g = E_m \exp j\omega t \Rightarrow \underline{i} = \underline{I}_m \exp j\omega t$$

Fonctionnement en haut-parleur $F_m = 0 \Rightarrow V_m = -\frac{B\ell}{Z_m} \underline{I}_m$

$$\left(Z_e + \frac{B^2 \ell^2}{Z_{\text{mec.}}} \right) \underline{I}_m = E_m$$

$$\frac{B^2 \ell^2}{Z_{\text{mec}}} = \underbrace{\frac{R^2}{\omega}}_{\text{résistance motrice}} + \underbrace{j\omega L}_{\text{réactance motrice}}$$

Circuit équivalent



II.3. Transduction - Bilan électromécanique

• Bilan d'énergie mécanique : $dE_m = \underbrace{\delta E_m^{\text{reçu}}}_{\text{terme d'échange}} + \underbrace{\delta E_m^{\text{produite}}}_{\delta W_{\text{frott}} + \delta W_L}$ (terme de création)

Sur un cycle : $\Delta E_m = 0$

$$E_m^{\text{reçu}} = -W_{\text{frott}} - W_L \quad (A)$$

• Bilan d'énergie électromagnétique (ici magnétique) : $dE_e = \delta E_e^r + \delta E_e^c$
Sur un cycle : $\Delta E_e = 0$

$$E_e^{\text{reçu}} = -W_T - W_C \quad (B)$$

• Equation de conservation $\delta W_L = -B\ell i v dt = -\delta W_C \Rightarrow \boxed{W_L + W_C = 0} \quad (C)$

• Bilan d'énergie électromécanique $E_{em} \equiv E_m + E_e$
 $E_m^r + E_e^r + W_{\text{frott}} + W_T = 0 \quad W_{\text{frott}} \leq 0, W_T \leq 0$

• Efficacité de la conversion pour un haut-parleur

$$\eta = \frac{-E_m^r}{E_e^r} = 1 - \frac{|W_{\text{frott}} + W_T|}{E_e^r} \quad 0 < \eta < 1$$

En pratique : le rendement dépend de la fréquence (cf impédance motrice) et est de l'ordre de 10%

$$E_e^r > 0 \Rightarrow \begin{cases} W_C = -W_L \\ W_T \leq 0, W_{\text{frott}} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow E_m^r < 0$$

Remarque : microphone (basé sur le principe de réversibilité de la transduction électromécanique) : $F_{app} \neq 0$ (force de pression acoustique sur la membrane) et $e_g = 0$; les équations sont identiques mais $\eta = (-E_e^r)/E_m^r$.

III. Système en rotation : moteur

II.1. Principe

A courant continu : enroulement monté sur un rotor tournant dans un champ radial créé par un aimant permanent. Des contacts, par l'intermédiaire de balais, permettent d'envoyer le courant (fonctionnement inverse = générateur de courant continu ou dynamo)

A courant alternatif : l'enroulement fixe (stator) et tournant (rotor) sont alimentés. Deux possibilités :

- le rotor n'est alimenté que par la fém induite par le champ tournant et le système est asynchrone

- le rotor est alimenté et la rotation est synchrone (fonctionnement inverse = alternateur)

III.2. Equations Fondamentales

Identiques aux précédentes moyennant la transposition

$$\vec{V} \leftrightarrow \vec{\Omega} \text{ (vitese angulaire)}$$

$$m \leftrightarrow J \text{ (moment d'inertie)}$$

$$\vec{F}_{adh} \leftrightarrow \vec{F}_{frott} \quad ; \quad \vec{F}_{app} \leftrightarrow \vec{F}_{app} \quad ; \quad k \leftrightarrow c \text{ (couple de rappel)}$$

$$J \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + a \vec{\Omega} + c \int \vec{\Omega} dt = \vec{F}_{app} + \vec{F}_L$$

Equation de conversion $\delta W_L = \vec{F}_L \cdot d\vec{\Omega} = -\delta W_c$

Efficacité de la conversion $\eta = \frac{-\epsilon_m}{\epsilon_e} = 1 - \frac{|W_{adh} + W_c|}{\epsilon_e}$

Le rendement est élevé (~ 80 à 90%) en limitant les frottements mécaniques (roulements à billes, graissage) et les pertes par effet Joule.

Conclusion

Souligner les très nombreuses applications

1. Le caractère réversible de la transduction électromécanique (générateur $\leftrightarrow$ récepteur de points de vue électromagnétique ou mécanique)
le "pivot" de la transduction est réalisé par le phénomène d'induction électromagnétique

L'efficacité de la conversion est limitée par les pertes par effet Joule et par frottement mécanique.