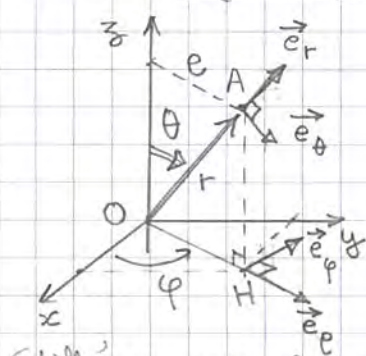


CINEMATIQUE

Cinématique = étude des mouvements indépendamment de leurs causes
 Définition d'un cadre spatio-temporel et d'événement
 Approximation newtonienne (ou non relativiste : $v \ll c$; temps absolu)

I Repères. Vitesse et accélération**I.1. Systèmes de coordonnées**

Repérage d'espace $\vec{OA} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
 $= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$
 $= r\vec{e}_r$

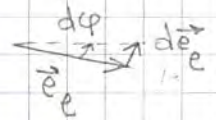
Symétrie cylindrique : invariance par rotation autour d'un axe (choisi comme Oz)
 Symétrie sphérique : invariance par rotation autour d'un point (choisi comme origine)

$\Rightarrow$ Tous les systèmes de coordonnées sont équivalents (différence avec les référentiels) et on choisit celui qui permet l'explicitation la plus simple

$\Rightarrow$ Les bases (ensemble des 3 vecteurs unitaires) cylindriques et sphériques sont locales

$$d\vec{OA} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho + dz\vec{e}_z = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$$

$$d\vec{OA} = dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$

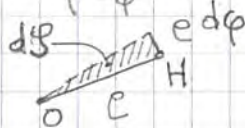
**I.2. Vitesse et accélération**

En associant une échelle des temps à un repère spatial, on définit un référentiel
 $\vec{v}_{A/R} = \vec{v} = \frac{d\vec{OA}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$$\vec{a}_{A/R} = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + (\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

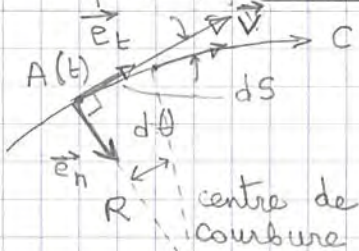
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) = \frac{2}{\rho} \dot{\varphi}$$



$\dot{\varphi}$ = vitesse angulaire dans le plan Oxy

Composantes intrinsèques (ou de Frenet)



$$\vec{v}_{A/R} = v \vec{e}_t \quad \text{avec } v = \|\vec{v}\|$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

s = abscisse curviligne

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{e}_n}{R} v$$

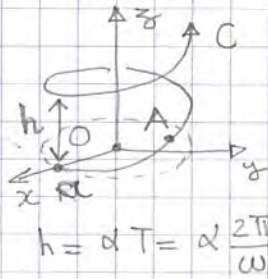
$$\boxed{\vec{a}_t = \dot{v} \vec{e}_t} \quad \boxed{\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{e}_n}$$

II Exemples de mouvements

II.1. Mouvement rectiligne (selon Oz) $x=y=0$, $R \rightarrow \infty$, $\vec{a} = a_t \vec{e}_z = \ddot{z} \vec{e}_z$
 et uniformément accéléré $\ddot{z} = a_0$; $\dot{z} = a_0 t + v_0$; $z = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + z_0$
 Cas particulier : uniforme $a_0 = 0$

II.2. Mouvement circulaire $\rho = R$, $\dot{\varphi} = \omega$, $\dot{z} = 0$ $\vec{v} = R\omega \vec{e}_\varphi$
 cas particulier uniforme ($\|\vec{v}\| = v = R\omega$)
 $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_\rho + R\dot{\omega} \vec{e}_\varphi$
 radiale orthoradiale
 $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_\rho$

II.3. Mouvement hélicoïdal



$e = r_0$; $\varphi = \omega t$; $z = vt$ (symétrie cylindrique)^{M2}

$$\vec{OA} = a\vec{e}_\rho + vt\vec{e}_z = a(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y) + vt\vec{e}_z$$

$$\vec{V} = a\omega\vec{e}_\varphi + v\vec{e}_z = a\omega(-\sin\omega t\vec{e}_x + \cos\omega t\vec{e}_y) + v\vec{e}_z$$

$$\vec{V}_0 = a\omega\vec{e}_\varphi + v\vec{e}_z$$

$$V = (a^2\omega^2 + v^2)^{1/2} = V_0 = \text{cte (mouvement uniforme)}$$

$$\vec{a} = -a\omega^2(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y) = -a\omega^2\vec{e}_\rho$$

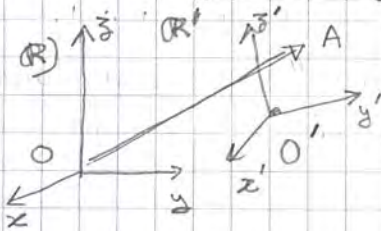
$$= \vec{a}_n + \vec{a}_t \quad \text{avec} \quad \vec{a}_t = \vec{0}$$

Rayon de courbure : $\vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{e}_n = -a\omega^2\vec{e}_\rho \Rightarrow R = \frac{V^2}{a\omega^2} = a \left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 a^2}\right)$

III Changement de référentiel

Cinématique : pas de référentiel privilégié $\Rightarrow$ on peut adopter un R' plus commode (pas d'"absolu" ou de "relatif") en mouvement par rapport à R

III.1. Dérivées d'un vecteur relatives à deux référentiels



$$\vec{OA} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'} \quad (2 \text{ repères})$$

$$\left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_R = \vec{V}_A/R = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z ; \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_{R'} = \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'} \quad (2 \text{ référentiels})$$

$$\left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_R = \dot{x}'\vec{e}_{x'} + x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + \dots$$

$$\equiv \vec{\omega}_{R'/R} \times \vec{e}_{x'} \quad (\text{définition du vecteur rotation angulaire instantanée})$$

$$\boxed{\left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_{R'} + \vec{\omega}_{R'/R} \times \vec{OA}}$$

III.2. Composition des vitesses

$$\vec{OA} = \vec{OO'} + \vec{O'A} \quad \text{on définit}$$

$$\vec{V}_A/R = \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_R + \left. \frac{d\vec{O'A}}{dt} \right|_R = \vec{V}_{O'/R} + \vec{V}_A/R'$$

$$\vec{V}'' = \vec{V}_A/R' = \left. \frac{d\vec{O'A}}{dt} \right|_{R'}$$

$$\vec{V}_A/R = \vec{V}_{O'/R} + \vec{V}_A/R' + \vec{\omega}_{R'/R} \times \vec{O'A}$$

$$\boxed{\vec{V}_e \equiv \vec{V}_{O'/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \times \vec{O'A}}$$

vitesse d'un point A qui serait fixe dans R' | vitesse d'entraînement

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_e} \quad (\text{avec } t = t')$$

III.3. Composition des accélérations

En dérivant une deuxième fois, on obtient

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c} \quad \text{avec} \quad \vec{a}_e = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{O'A} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{O'A}$$

$$\text{et } \vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}' = \text{accélération de Coriolis (ou complémentaire)}$$

III.4. Cas particuliers de mouvement relatif

- $\Rightarrow$ Translation $\Rightarrow \vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0}$ et $\vec{V}_e = \vec{V}_{O'/R}$ = vitesse du référentiel mais O' décrit une trajectoire quelconque
- Translation rectiligne $\vec{V}_{O'/R} = V_e \vec{e}_z$ (peut être accéléré)
- Translation rectiligne uniforme $V_e = \text{cte}$
- $\Rightarrow$ Rotation autour de $O' = O$ $\vec{V}_e = \vec{\omega} \times \vec{OA} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
- Rotation uniforme $\omega = \text{cte}$ $\vec{a}_e = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega^2 \vec{OH}$ (centrifuge)
- $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}'$ (n'est nulle que si A est immobile dans R')

REFERENTIEL GALILEEN-DYNAMIQUE

Dynamique = étude des mouvements en relation avec leurs causes (forces)
Lois énoncées par Newton; sont simples dans une famille de référentiels privilégiés dits galiléens

I Principe fondamental de la dynamique

I.1. Masse et quantité de mouvement

Point matériel A caractérisé par sa masse m et, dans un référentiel donné, par sa vitesse $\vec{v}_{A/R}$

$m > 0$, invariant (ne dépend pas de son état de mouvement) et additif (en relativité galiléenne) $M = \sum_i m_i$; et constante

Quantité de mouvement $\vec{p}_{A/R} \equiv m_A \vec{v}_{A/R}$ (en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

(Pour un système $\vec{P}_R = \sum_i \vec{p}_{i/R} = \sum_i m_i \vec{v}_{i/R}$)

I.2. Principe de l'inertie (1^{ère} loi de Newton)

Il existe un référentiel privilégié tel que $\vec{v}_{A/R} = \vec{c}t$ et donc $\vec{p}_{A/R} = \vec{c}t$ comme par exemple le référentiel de Copernic (lié au Soleil et à 3 étoiles fixes) ou avec une bonne approximation le référentiel terrestre

Comme $\vec{v}_{A/R} = \vec{v}_{A/R'} + \vec{v}_e$ (composition des vitesses, galiléenne) $\Rightarrow$ si $\vec{v}_e = \vec{c}t$ (R' en translation rectiligne uniforme par rapport à R , est aussi "privilégié" dit galiléen $\Rightarrow$ infinité de référentiels (pas de R absolu).

I.3. Principe fondamental de la dynamique (2^{ème} loi de Newton)

$$\frac{d\vec{p}_R}{dt} = \vec{F}$$

Dans R galiléen, le taux de variation de la quantité de mouvement est égal à la somme des forces appliquées

soit aussi $m \vec{a}_R = \vec{F}$ avec $m =$ masse d'inertie car $\vec{a}$ d'autant plus faible que m est grand.

Equilibre d'un point matériel $\vec{F} = \vec{0} = \sum_i \vec{F}_i$ et $\vec{v} = \vec{0}$ à $t=0$

I.3. Principe des actions réciproques (3^{ème} loi de Newton)

Système de deux points matériels en interaction mutuelle (aucune action extérieure) $\vec{F} = \vec{0} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

II Forces et interactions

II.1. Interactions fondamentales

a) gravitation $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{1 \rightarrow 2}$ masses "graves" $\vec{e}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\vec{A}_1 A_2}{r_{12}}$; $r_{12} = \|\vec{A}_1 A_2\|$

toujours attractive

Plusieurs sources

$$\vec{F}_2 = m_2 \left(-G \sum_i \frac{m_i}{r_{i2}^2} \vec{e}_{i \rightarrow 2} \right)$$

Exemples: Terre + Lune + Soleil

b) Electrique $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{1 \rightarrow 2}$ $\equiv$ champ de gravitation $\vec{g}(A_2)$
 $9 \times 10^9 \text{ SI}$ $q_1 q_2 > 0$ ou < 0

Plusieurs sources

$$\vec{F}_2 = q_2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_{i2}} \vec{e}_{i2} \right)$$

M4

(Δ) Force magnétique ne satisfait pas au principe des actions réciproques
 $\vec{F}_{m2} = q_2 \vec{v}_2 / R \times \vec{B}(A_2)$

c) Nucléaires, fortes ou faibles, pas d'effet macroscopique en mécanique classique newtonienne.

II.2. Exemples de forces

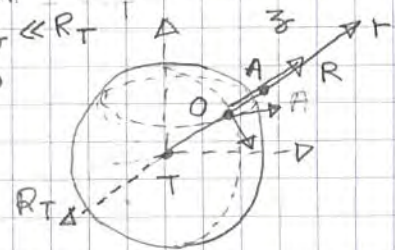
Résultent d'interactions fondamentales à l'échelle microscopique (Van der Waals pour le contact et les frottements, électrique et quantiques pour l'élasticité)

a) Force de gravitation et poids

A la surface de la terre, en assimilant R_T à un référentiel galiléen (en fait approximations: cf. plus loin): $\vec{F} = \vec{T}A = \vec{T}O + O\vec{A}$
 $\vec{r} \approx R_T$ avec $z \ll R_T$

$$\boxed{\vec{F} \approx m \left(-G \frac{M_T}{R_T^2} \vec{e}_r \right) \approx m \vec{g}} \quad (m_{inertie} = m_{grave})$$

$$g \approx 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$



b) Force de frottement visqueux (fluide):

$$\boxed{\vec{F}_R = -\alpha \vec{v} / R} \quad \text{avec } \alpha > 0$$

à forte vitesse (aéronautique)

$$\vec{F}_R = -\alpha v^2 \vec{e}_v$$

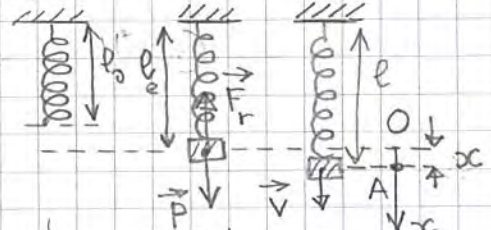
c) Force de rappel élastique

Force de rappel proportionnelle à l'allongement (Loi de Hooke)

$$\text{Equilibre: } \sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_r = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{F}_r = -K(\ell - \ell_0) \vec{e}_x} = -m\vec{g}$$

$$\Delta \ell = \ell - \ell_0 = \frac{mg}{K} \quad (\text{mesure de } m \text{ après étalonnage})$$



statique

dynamique

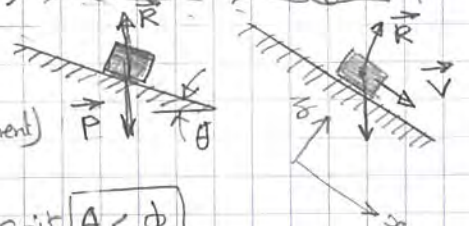
d) Force de contact

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t} \quad \text{avec} \quad \boxed{R_t = f R_n} \quad f \approx 0,2 \text{ à } 0,5$$

$f \equiv \tan \phi$ (angle de frottement)

$$\text{Equilibre (sans glissement): } m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{0}$$

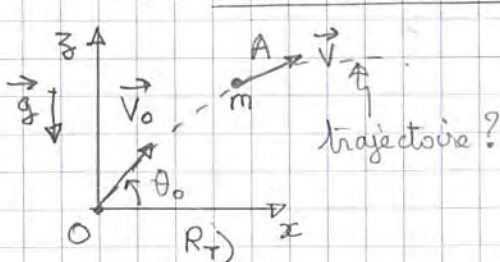
$$R_t = P \sin \theta < R_{t, \text{lim}} = f_0 R_n = f_0 P \cos \theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta < \phi_0}$$



II Exemples importants de mouvement

En référentiel supposé galiléen: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$ explicitation dans la base la plus appropriée $\Rightarrow$ intégration pour $\vec{v}$ et $\vec{p} \Rightarrow$ intégration pour $\vec{r}$.

II.1. Mouvement de chute libre



$$m\vec{g} - \alpha \vec{v} = m\vec{a}$$

frottement visqueux

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} = \vec{g} \Rightarrow \text{Oxyz}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} &= 0 & \dot{x} &= v_0 \cos \theta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \ddot{y} + \frac{\alpha}{m} \dot{y} &= 0 & \dot{y} &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} &= -g & \dot{z} &= -g\tau + v_0 \sin \theta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{m}{\alpha} \quad \left(\tau = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right)$$

Cas limite: $\alpha \rightarrow \infty$ (pas de frottement)

$$\dot{z} = v_0 \cos \theta_0 \Rightarrow \text{mouvement uniforme selon } Ox$$

$$x = (v_0 \cos \theta_0) t$$

$\ddot{z} = -g \Rightarrow$ mouvement uniformément accéléré selon $Oz \Rightarrow \dot{z} = -gt + v_0 \sin \theta$
 $\Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \theta}\right)^2 + x \tan \theta$ (trajectoire parabolique)
 Portée maximale ? $z = 0 \Rightarrow x_M = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$ et donc $\theta_{opt} = \pi/4$

II.2. Mouvement d'oscillation

$$m\ddot{q} - k(l - l_0)\vec{e}_x - \alpha\vec{v} = m\vec{a}$$

$$l - l_0 = \underbrace{(l - l_e) + (l_e - l_0)}_x$$

$$\left. \begin{aligned} -kx\vec{e}_x - \alpha\vec{v} &= m\vec{a} \\ \text{selon } Ox \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\boxed{\omega_0 Q = Q} \text{ facteur de qualité}$$

équation différentielle homogène et linéaire $\Rightarrow$ équation caractéristique $x = A \exp(\lambda t)$

$$\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q}\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$$

- (régime libre)
 a) $Q < 0,5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ exponentielles réelles $\Rightarrow$ régime aperiodique
 b) $Q > 0,5 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ exponentielles imaginaires $\Rightarrow$ oscillatoire
 c) $Q = 0,5 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ aperiodique critique

Pseudo pulsation (cas b) $\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

$$x = x_M \exp\left(-\frac{t}{2Q}\right) \cos(\omega t) \quad \text{avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

II.3. Glissement avec frottement ($\theta > \phi_0$)

$R_n > 0$: contact ; $R_t \neq 0$: frottement ; $R_t = 0$: glissement sans frottement (ou $f = 0$)

$$\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \left. \begin{aligned} R_n + P \cos \theta &= 0 \\ -R_t + P \sin \theta &= m\ddot{x} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} R_t &= f R_n \\ \ddot{x} &= g(\sin \theta - f \cos \theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

mouvement uniformément accéléré.

I. Dynamique dans un référentiel non galiléen

III.1. Principe fondamental

$$\vec{m}\vec{a}' = \frac{d\vec{p}_{A/R'}}{dt} = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

$\vec{F}_{ie}$ = force d'inertie d'entraînement
 $\vec{F}_{ic}$ = force d'inertie de Coriolis

Condition d'équilibre : $\vec{v}_{A/R'} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{ic} = \vec{0}$ et $\vec{F} - m\vec{a}_e = \vec{0}$

Application : poids apparent dans un ascenseur

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_e \Rightarrow \vec{R} = -m(\vec{g} - \vec{a}_e) = -\vec{P}_{app}$$

Si $\vec{a}_e = \vec{g} \Rightarrow \vec{R} = \vec{0} \quad \vec{P}_{app} = \vec{0}$: apesanteur

$$\begin{aligned} \uparrow \vec{a}_e \\ \downarrow \vec{g} \end{aligned} \quad \vec{P}_{app} > \vec{P}$$

III.2. Référentiel terrestre et poids

Equilibre dans R_T : $\vec{P} + \vec{R} \equiv \vec{0}$

$$m\vec{a}'_{/R_T} = m\vec{g} + \vec{R} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \vec{0}$$

et $\vec{v}_{A/R_T} = \vec{0}$

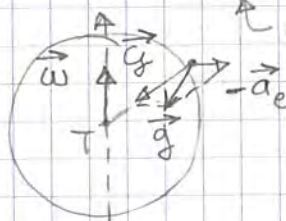
$$\vec{a}_e = \vec{a}_T + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{TA}$$

$\vec{g}(A) \neq \vec{g}(T) \Rightarrow$ phénomènes de marées
 autres astres (Lune et Soleil)

($\vec{R}$ = réaction du sol, ou tension d'un fil)

$$\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}_e \equiv m\vec{g}$$

↑ champ de gravitation en A



En plus de la quantité de mouvement, la dynamique d'un système matériel est caractérisée par deux autres grandeurs, le moment cinétique et l'énergie mécanique. Découle du PFD, deux théorèmes, celui du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique qui dans certains cas importants conduisent à la conservation de ces grandeurs. D'un point de vue général, on peut lier la quantité de mouvement (moment linéaire) et le moment cinétique (moment angulaire) à la translation et à la rotation dans l'espace, alors que l'énergie mécanique est liée à l'évolution (translation dans le temps). Ce lien est établi en mécanique analytique (et en mécanique quantique).

I. Théorème du moment cinétique

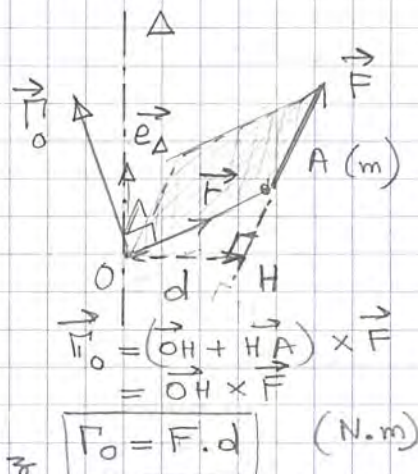
I.1. Moment d'une force (/repère)

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{OA} \times \vec{F} = (yF_z - zF_y)\vec{e}_x + \dots$$

(vecteur axial ou pseudo-vecteur)
point $\vec{\Gamma}_O$ nul si $\vec{F} \parallel \vec{OA}$ (force "centrale")

$$\Gamma_\Delta = \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{e}_\Delta = (\vec{OA} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta$$

axe Γ_Δ nul si $\vec{F} \parallel \vec{e}_\Delta$ ou $\vec{OA} \parallel \vec{e}_\Delta$



I.2. Moment cinétique (/référentiel)

$$\vec{L}_{O/R} = \vec{OA} \times \vec{P}_{/R} = \vec{OA} \times m \vec{V}_{/R}$$

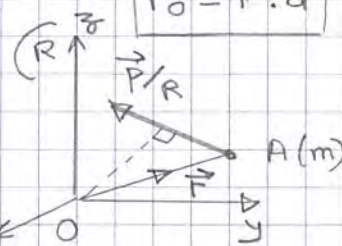
$$= (yP_z - zP_y)\vec{e}_x + \dots$$

$$\vec{L}_{O/R} = \vec{O'O} \times \vec{P}_{/R} + \vec{L}_{O'/R}$$

I.3. Théorème du moment cinétique (/référentiel galiléen)

$$\frac{d\vec{L}_{O/R}}{dt} = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{\Gamma}_O \quad \left(\text{puisque } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ (somme des forces)} \right)$$

$\frac{d\vec{V}_{/R}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{O'H}}{dt} \right) = \vec{P}_{/R} / m$



Exemple : pendule simple

coordonnées cylindriques $\vec{OA} = \vec{r} = l \vec{e}_\rho$; $\vec{v} = l \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$

$$\vec{L} = m l^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m l^2 \ddot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$\vec{OA} \times \vec{F} = \vec{OA} \times (m\vec{g} + \vec{T}) = \vec{OA} \times m\vec{g} = l m g \vec{e}_\rho \times \vec{e}_x$$

$$= -m g l \sin \varphi \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

petits angles $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

I.4. Conservation du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_{O/R}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = cte \quad \text{si } \vec{F} = \vec{0} \text{ (somme des forces nulle)}$$

$$\text{si } \vec{F} \parallel \vec{r} \text{ car } \vec{\Gamma}_O = \vec{0} \text{ (force centrale)} \Rightarrow$$

Exemples : gravitation et force électrique (seule force agissante) mouvement plan $(\vec{r}_O, \vec{p}_O)$

$$\vec{L}_{O/R} = \vec{OA} \times m \vec{v} = m l \vec{e}_\rho \times l \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

$$= cte \Rightarrow \dot{\varphi} = cte \text{ (vitesse angulaire)}$$

$\left(\frac{d\varphi}{dt} = 0 \right)$

II Théorème de l'énergie cinétique

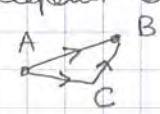
II.1. Travail d'une force (/série)

$$\delta G = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad d\vec{r} = d(\vec{OA})$$

$$\delta G = 0 \text{ si } \vec{F} \perp \vec{v} \text{ (exemple: } \vec{R}_n)$$

$$\delta G > 0 \text{ moteur} \quad \delta G < 0 \text{ résistant}$$

$$G_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{dépend en général du chemin suivi}$$

(exemple : frottement  $\vec{F}_t \parallel d\vec{r} \Rightarrow W_f = F_t \cdot l$)

Puissance mécanique

$$P = \frac{\delta G}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (W = J/s)$$

II.2. Energie potentielle

G_{AB} ne dépend pas du chemin suivi ou $\delta G = dG$

$$\delta G = d(-E_p) \Rightarrow E_p \text{ défini à une constante près, arbitraire}$$

$$E_p(\vec{r}) \Rightarrow dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \dots = \vec{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p \quad \text{La force "dérivée" d'une énergie potentielle}$$

$$G_{AB} = -\int_A^B dE_p$$

$$G_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B)$$

II.3. Energie cinétique (/référentiel)

$$E_{K/R} \equiv \frac{p_{R/R}^2}{2m} = \frac{1}{2} m \vec{v}_{R/R}^2 \geq 0$$

II.4. Théorème de l'énergie cinétique (/référentiel galiléen)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{R/R}}{dt} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} E_{K/R}$$

Conservation de $E_{K/R}$ si $\vec{F} = \vec{0}$ (système isolé)
 $\vec{F} \perp \vec{v}$

En décomposant $\vec{F}$ en force "conservative" et "non conservative"
 $\vec{F}_c \cdot \vec{v} = -\vec{\text{grad}} E_p \cdot \vec{v} = -\frac{dE_p}{dt}$ (E_p ne dépend pas explicitement du temps)

$\Rightarrow$ Energie mécanique $E_{\text{mec}} = E = E_K + E_p$

$$\frac{dE_K}{dt} = \vec{F}_c \cdot \vec{v} + \vec{F}_{nc} \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \vec{F}_{nc} \cdot \vec{v}$$

$$dE = \delta G_{nc}$$

La non-conservation de l'énergie mécanique est due aux forces non-conservatives (exemple : frottement).

Si $\vec{F}_{nc} = 0$ ou si $\vec{F}_{nc} \perp \vec{v} \Rightarrow E_{\text{mec}} = \text{cte}$: conservation de l'énergie mécanique

Exemples : glissement sans frottement ; chute libre sans frottement $\Rightarrow$

$$m\vec{a} = m\vec{g} = \vec{P} \quad \delta G(\vec{P}) = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg dz \quad (\vec{g} = -g\vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow E_p = mgz + \text{cte}$$

* Chute libre $E(A) = E(B) \Rightarrow \Delta E_K = -\Delta E_p = -mg \Delta z$
 $\Delta z > 0 \Rightarrow \Delta E_K < 0$ (lancer vers le haut)

* Pendule simple (cf figure p. M6)

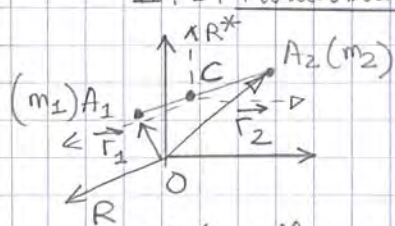
$$E = \frac{1}{2} mv^2 - mgx = \text{cte} \quad \left. \begin{array}{l} x = l \cos \varphi ; v = l \dot{\varphi} \\ \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = \text{cte} \xrightarrow{\dot{\varphi}=0} \text{équilibre}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} (m l^2 \ddot{\varphi} + mgl \cos \varphi) = 0 \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

dérivation

III Problème à deux corps - Applications

III.1. Mouvement d'ensemble et mouvement relatif



d) Quantité de mouvement

⇒ dans R' en translation avec $\vec{v}_e/R$

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' + M \vec{v}_e$$

$$\vec{P}/R = \vec{P}/R' + M \vec{v}_e$$

$$\vec{P}/R = \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_e$$

$$\text{avec } M = m_1 + m_2 = \text{masse totale}$$

Référentiel du centre de masse (ou barycentrique)

$$\Rightarrow \vec{P}_2^* = -\vec{P}_1^* \equiv \vec{P}$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{CA}_1 + m_2 \vec{CA}_2 = \vec{0} \text{ ou } R_C$$

On choisit $C \equiv$ barycentre pour $\vec{d}e = \vec{0}$

$$\text{On pose } \vec{CA}_2 - \vec{CA}_1 = \vec{A}_1 A_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{12} = \vec{r}$$

b) Moment cinétique

$$\vec{L}_{O/R} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = (\vec{OC} + \vec{CA}_1) \times [m_1 (\vec{v}_1^* + \vec{V})] + (\vec{OC} + \vec{CA}_2) \times [m_2 (\vec{v}_2^* + \vec{V})]$$

$$\vec{L}_{O/R} = \vec{OC} \times \vec{P} + \vec{L}_C^*$$

Théorème de Koenig relatif au moment cinétique

$$\text{avec } \vec{L}_C^* = \vec{CA}_1 \times \vec{P}_1^* + \vec{CA}_2 \times \vec{P}_2^* \text{ soit } \vec{L}_C^* = \vec{r} \times \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* \equiv \vec{v} \text{ (vitesse relative dans } R^*)$$

$$= \vec{v}_2^* \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = m_2 \vec{v}_2^* \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)$$

$$(m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = \vec{0})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \mu \vec{v} \\ \vec{L} = M \vec{V} \end{array} \right.$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{masse réduite}$$

c) Energie cinétique

$$\epsilon_{R/R} = \frac{1}{2m_1} (\vec{P}_1^* + m_1 \vec{V})^2 + \frac{1}{2m_2} (\vec{P}_2^* + m_2 \vec{V})^2 \Rightarrow \epsilon_{R/R} = \frac{P^2}{2M} + \epsilon_R^*$$

$$\text{avec } \epsilon_R^* = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{P^2}{2\mu}$$

Théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique

III.2. Energie potentielle d'interaction (centrale)

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\text{grad}_2 \epsilon_p(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|) = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \text{ et donc } \frac{d\vec{L}_C^*}{dt} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

$$\frac{d\vec{L}_C^*}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \text{ avec } \vec{F} = -\text{grad} \epsilon_p(r) = -\frac{d\epsilon_p}{dr} \vec{e}_r \text{ (force centrale)} \Rightarrow \vec{L}_C^* = \vec{L}_C$$

$$\vec{L}_C^* = \vec{L}_O = \vec{r}_O \times \vec{p}_O \Rightarrow \text{trajectoire dans le plan défini par } \vec{r} \text{ et } \vec{p} \text{ à l'instant origine}$$

$$\text{Energie mécanique : } \epsilon_{\text{mec}} = \epsilon_k + \epsilon_p = \frac{P^2}{2M} + \frac{P^2}{2\mu} + \epsilon_p(r)$$

(système isolé)

→ mouvement dans R^*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\vec{L}_C^* = \vec{L} = \vec{r} \times \mu \vec{v} = \vec{r} \times \mu r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Translation d'ensemble

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)^2$$

$$L^2 = \mu^2 r^2 \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \epsilon_p^{\text{eff}}(r) \\ \text{avec } \epsilon_p^{\text{eff}} = \epsilon_p + \frac{L^2}{2\mu r^2} \end{array} \right.$$

Equivalence formelle avec particule fictive de masse μ soumise à $\epsilon_p(r)$

Si $m_1 \gg m_2$ (électron dans un atome, satellite terrestre masse suspendue à un support...)

$$\Rightarrow M \approx m_1 \text{ et } \mu \approx m_2 = m; \vec{r} \approx \vec{r}_2$$

R^* se confond avec R si $C=O$

on retrouve la dynamique du point matériel avec interaction centrale

Cas particuliers : $\vec{r}$ direction fixe

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = r \vec{e}_x \\ \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{0} \end{array} \right.$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \epsilon_p(x)$$

$\vec{r}$ de norme constante (système rigide)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = r_0 \vec{e}_r \\ \frac{dr}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

$$\epsilon = \frac{L^2}{2mr_0^2} + \epsilon_p(r)$$

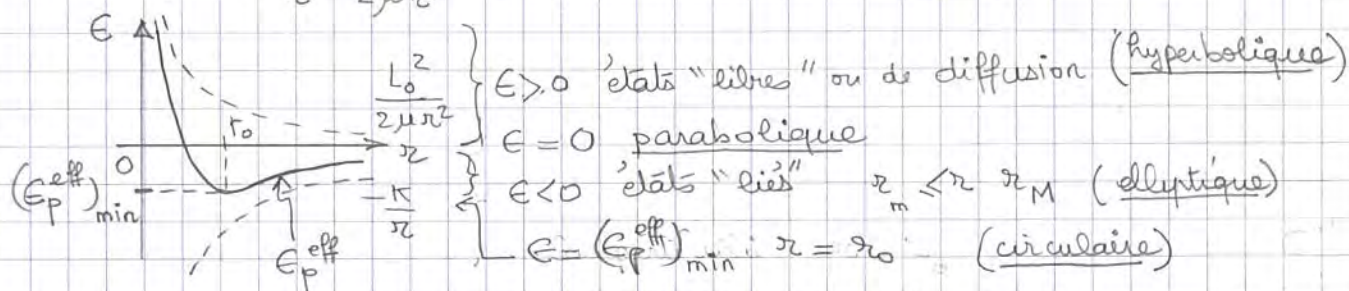
$$I = m r_0^2 = \text{moment d'inertie}$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \text{ car } \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_r$$

$$\epsilon_k = \frac{L^2}{2I}$$

III.3. Application à la dynamique planétaire

Interaction coulombienne $\vec{F} = -K \frac{\vec{e}_r}{r^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} K = G m_1 m_2 \text{ (gravitation)} > 0 \\ K = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \text{ (électrique)} \end{array} \right.$
 $\Rightarrow \epsilon_p(r) = -\frac{K}{r} + \text{cte}$; $\text{cte} = 0$ si $\epsilon_p(\infty) = 0$
 $\epsilon_p^{\text{eff}} = -\frac{K}{r} + \frac{L_0^2}{2\mu r^2}$



Mouvement plan $\Rightarrow \vec{r} = r \vec{e}_r$; $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\omega = \dot{\varphi} \neq \text{cte}$
 $\vec{L}_0 = \mu \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \mu r^2 \vec{\omega} = \mu r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z = \text{cte}$ (vitesse angulaire constante)
 Cas des états liés $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{dt}} = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}}$
 Cas particulier du mouvement circulaire
 $r = r_0 = \text{cte}$ $\omega = \text{cte}$
 $E = (\epsilon_p^{\text{eff}})_{\min} \quad \frac{d\epsilon_p^{\text{eff}}}{dr} \Big|_{\min} = 0 = +\frac{K}{r_0^2} + \frac{L_0^2}{\mu r_0^3}$
 $\left. \begin{array}{l} \epsilon_K = \frac{L_0^2}{2\mu r_0^2} = -\frac{\epsilon_p}{2} \\ \text{pure rotation} \end{array} \right\} \boxed{E = -\epsilon_K = \frac{\epsilon_p(r_0)}{2}}$

Vitesse de libération : cas limite (parabole) de passage d'un état libre à un état lié $\Rightarrow E = 0 = \frac{1}{2} \mu v_e^2 - \frac{K}{r} \Rightarrow \boxed{v_e = \left(\frac{2K}{\mu r}\right)^{1/2}}$

Application au lancer de fusée depuis la surface de la Terre

$$K = G m M_T ; \mu \simeq m ; r = R_T \quad v_e = \left(2 \frac{G M_T}{R_T}\right)^{1/2} = (2 g R_T)^{1/2} = 11,2 \text{ km/s}$$

Application au modèle planétaire de l'atome

$$K = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{utile pour le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène})$$

III.4. Application aux collisions

Système isolé de deux particules ; l'interaction est limitée à une zone d'extension limitée (exemple : forces de contact)

On examine les caractéristiques dynamiques "avant" et "après" en écrivant les lois de conservation (quantité de mouvement, moment cinétique et l'énergie mécanique)

Le problème est analysé dans le référentiel du centre de masse R^*

$$\vec{P}_{av}^* = \vec{P}_{ap}^* = \vec{0} ; \epsilon_{av}^* = \epsilon_{ap}^*$$

état élastique $\leftarrow$ état interne inchangé $\Rightarrow \epsilon_{K,av}^* = \epsilon_{K,ap}^*$
 $\Rightarrow P_{1,av}^* = P_{1,ap}^* ; P_{2,av}^* = P_{2,ap}^*$ (simple rotation)
 Si $m_1 = M \gg m_2 = m \Rightarrow$ phénomène de réflexion dans R
 état inélastique $\rightarrow$ Non-conservation de l'énergie cinétique car modification de l'énergie interne (déformation et chaleur)

I Mécanique des systèmes

généralisation à N points matériels ce qui a été fait pour $N=2$

I.1. Référentiel du centre de masse

R^* en translation par rapport à R supposé galiléen, origine en C : $\vec{\omega}_{R^*/R} = \vec{0}$
 $M \vec{OC} = \sum_i m_i \vec{OA}_i = \int_V \rho_m(A_i) \vec{OA}_i dV_i$; $M = \sum_i m_i = \int_V \rho_m dV$; $\sum_i m_i \vec{CA}_i = \vec{0}$
 $\Rightarrow \sum_i m_i \vec{V}_i^* = \sum_i \vec{p}_i^* = \vec{P}^* = \vec{0}$ ("bonne" définition de R^*) ΔR^* non galiléen en général
 $\vec{P}/R = M \vec{V}$ $\vec{V} = \vec{V}_{C/R}$

I.2. Théorème de la quantité de mouvement

$$\left| \frac{d\vec{P}/R}{dt} = M \vec{a}_{C/R} = \vec{F}_{ex} \right| \text{ car } \vec{F}_{in} = \sum_i \vec{F}_{i,jin} = \vec{0} \text{ puisque } \vec{F}_{i \rightarrow j} = -\vec{F}_{j \rightarrow i} \text{ (3° loi de Newton)}$$

Conséquence: Si $\vec{F}_{ex} = \vec{0}$ (système isolé) $\Rightarrow \vec{P}/R = \vec{cte}$ (conservation de la quantité de mouvement)
 et $\vec{V}_{C/R} = \vec{cte}$ (translation rectiligne uniforme)

Exemple de mouvement: la trajectoire d'un objet de forme quelconque soumis seulement au poids (pas de frottement) est parabolique; ce n'est plus vrai avec les frottements et peut-être complexe (feuille, balle "liftée")

I.3. Théorème du moment cinétique

$$\vec{L}_{O/R} = \vec{L}^* + \vec{OC} \times \vec{P}/R \quad \text{Théorème de Koenig; } \vec{L}^* \text{ indépendant du point}$$

$$\left| \frac{d\vec{L}_{O/R}}{dt} \right|_R = \vec{\Gamma}_{O,ex} \text{ car } \vec{\Gamma}_{O,in} = \sum_i \vec{OA}_i \times \vec{F}_{i,jin} = \vec{0} \quad \left(\vec{L}_O^* = \vec{L}_C^* + \vec{OC} \times \sum_i \vec{p}_i^* = \vec{L}_C^* \right)$$

Δ Si R non galiléen: $\vec{\Gamma}_{O,i}$ (moment des forces d'inertie)
 puisque $\vec{OA}_i \times \vec{F}_{i \rightarrow j} + \vec{OA}_j \times \vec{F}_{j \rightarrow i} = A_i A_j \times \vec{F}_{i \rightarrow j} = \vec{0}$

$$\left| \frac{d\vec{L}^*}{dt} \right|_R = \vec{\Gamma}_{G,ex} \text{ même si } R^* \text{ est non galiléen car } \vec{\omega}_{R^*/R} = \vec{0} \text{ et } G \text{ peut être pris comme origine}$$

Exemple: Dans le mouvement d'un objet soumis au seul poids, le moment cinétique demeure constant

Conséquence: si $\vec{\Gamma}_{O,ex} = \vec{0}$ (système isolé) $\Rightarrow \vec{L}_{O/R} = \vec{cte}$ (conservation du moment cinétique)

I.4. Théorème de l'énergie cinétique

$$E_{K/R} = E^* + \frac{P^2/R}{2M} = E^* + \frac{1}{2} M V_{C/R}^2 \quad \text{Théorème de Koenig}$$

$$\left| \frac{dE_{K/R}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{ex}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{in}) \right| \quad \mathcal{P}(\vec{F}_{in}) \neq 0 \text{ même si } \vec{F}_{in} = \vec{0} \text{ et } \vec{\Gamma}_{O,in} = \vec{0}$$

$\hookrightarrow$ important $\Rightarrow$ 1^{re} ppe thermodynamique

En tenant compte des forces qui "dériveraient" d'une énergie potentielle $\Rightarrow$

$$\frac{dE_{mec/R}}{dt} = \mathcal{P}_{NC}(\vec{F}_{ex} + \vec{F}_{in})$$

Conséquence: Cas où les forces sont conservatives $\Rightarrow E_{mec/R} = \vec{cte}$ (conservation de l'énergie mécanique)

$$\sum (\vec{F}_{in}) = 0$$

II.1. Mouvement d'un solide

$\vec{AB}$ de norme fixe dans $\mathbb{R}^3$ lieue solide
En général rotation et translation non
uniformes

$$\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_R = \vec{\omega}_{R'/R} \times \vec{AB} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

Vecteur rotation du solide

a) Translation pure: $\vec{\Sigma} = \vec{0}$; $\vec{L}/R = \vec{OG} \times \vec{P}/R$ car $\vec{L}^* = \vec{0}$

$E_{K/R} = \frac{1}{2} M V_{G/R}^2$
 $\vec{p}_{/R} = M \vec{v}_{G/R}$
 Tout se passe comme si toute la masse M était concentrée au centre de masse G

$$\left. \frac{d\vec{p}/R}{dt} \right|_R = M \vec{a}_{G/R} = \vec{F}_{ex} \quad \left. \frac{dE_{k/R}}{dt} \right|_R = \vec{F}_{ex} \cdot \vec{V}_G \quad \left. \frac{dE_{mec/R}}{dt} \right|_R = \underline{\underline{P_{NC}(F_{ex})}}$$

b) Rotation autour d'un axe fixe Δ : $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_\Delta$; $O \in \Delta$; $\vec{V}_{O/P} = \vec{0}$

$$\vec{v}_{i/R} = \vec{\omega} \times \vec{OA}_i \quad \vec{L}_{O/R} = \sum_i m_i \vec{OA}_i \times \vec{v}_{i/R} \rightarrow$$

$$\vec{L}_{O/P} = \sum_i m_i \vec{OA}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{OA}_i) \quad \text{pas colinéaire à } \vec{\Omega} \text{ en général}$$

$$\epsilon_{K/R} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_{i/R}^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_{i/R} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{OA}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{OA}_i \times \vec{V}_{i/R}) \cdot \vec{\Omega}$$

$$\epsilon_{R/R} = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{L}_{O/R}$$

$\Rightarrow$ Si Δ est un axe de symétrie de $\mathcal{S}$ (a) ou $\mathcal{S}$ dans un plan $\perp \Delta$ (b)

$$\boxed{\vec{L}_{A/R} = I_A \vec{\Omega}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{K/R} = \frac{1}{2} I_A \Omega^2}$$

$$\frac{d\vec{L}_{A/R}}{dt} \Big|_R = I_A \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\Gamma}_{A/ex}$$

$$\left(\frac{dE_{k/R}}{dt} \right)_R = \vec{A}_{ex} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\begin{array}{l} \text{Si } m_j = m_j^{\uparrow} \quad (a) \\ \text{OH}^{\uparrow} = \text{OH}_j^{\uparrow} \quad \text{H}_j \cdot \text{H}_j = -\text{H}_j \cdot \text{H}_j \end{array} \quad \left| \quad \text{or } m_j^{\uparrow} \text{OH}^{\uparrow} = 0 \quad (b) \right.$$

II.2. Contact entre solides

Puissance des forces de contact

$\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{R}) = 0$ $\begin{cases} \text{si } \vec{R} \perp \vec{V}_{A/R} \text{ (pas de glissement)} \\ \text{ou } \vec{V}_{A/R} = 0 \text{ (pas de glissement)} \end{cases}$

point de S qui coïncide avec I

a) Pendule pesant

Liaison en A parfaite
(seul le poids intervient)

$$I_A \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{OG} \times M \vec{g}$$

$$I_{\Delta} \ddot{\theta} = m g a \sin \theta ; \quad \omega_0^2 = \frac{m g a}{I_{\Delta}}$$

Pendule simple équivalente $l = \frac{I \Delta}{m a}$

b) Roulement sans glissement

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M} \vec{a}_{G/R} = \vec{M} \vec{g} + \vec{R} \quad \vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t \\ \frac{d\vec{L}^*}{dt} \Big|_R = \vec{\Gamma}_G(\vec{M} \vec{g}) + \vec{\Gamma}_G(\vec{R}) = \vec{GA} \times \vec{R}_t \\ \vec{L}^* = I_A \vec{\Omega} \text{ avec } I_A = \frac{1}{2} M a^2 \end{array} \right.$$

$$\text{out} \left(\frac{dE_{\text{mec}}/R}{dt} \right)_R = \mathcal{P}_{\text{NC}}(\vec{F}_{\text{ex}}) = 0$$

$$E_{\text{mec}} = E_k^* + \frac{1}{2} M V_G^2 + m g (a - M g x \sin \theta) + \text{cte}$$

$$E_k^* = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \rightarrow \frac{3}{4} M a^2 \dot{\varphi}^2 - M a \varphi \sin \theta = \text{cte}$$

En dérivant $\ddot{\varphi} = \frac{2g \sin \theta}{3a}$

