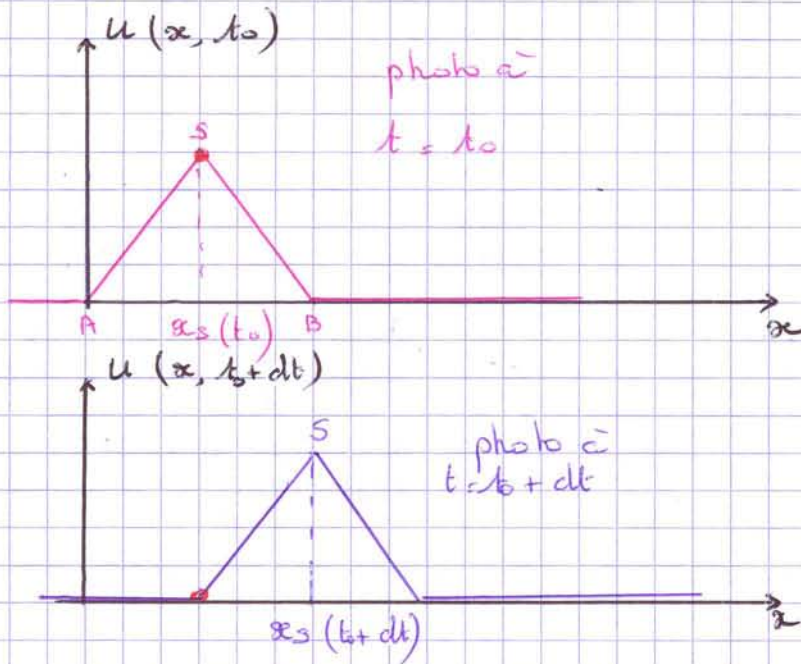


I. Equations de d'Alembert1 Dérivation

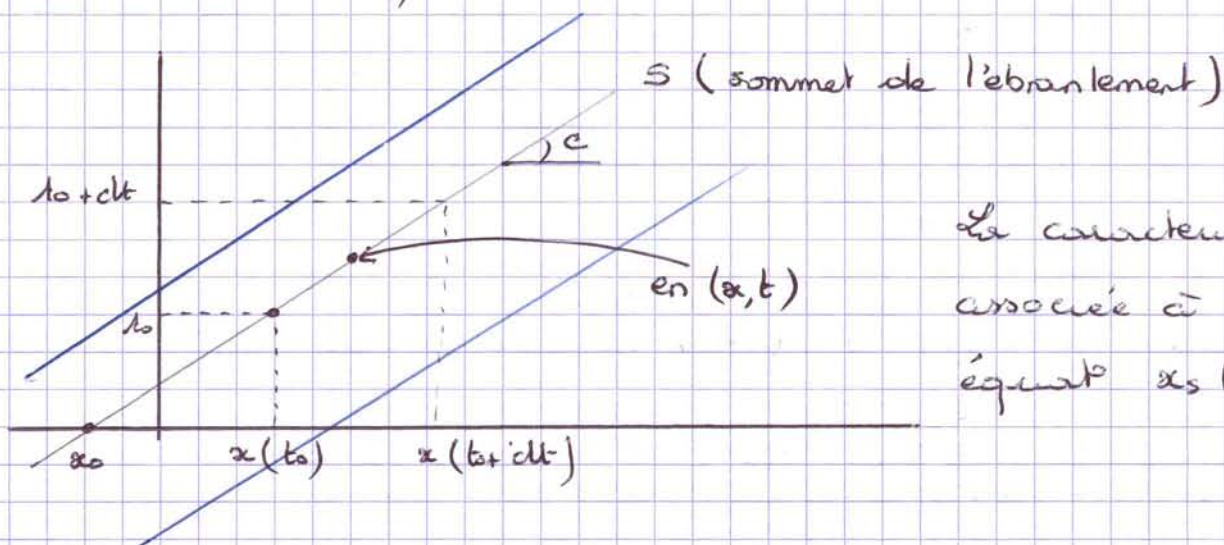
Expérience d'une corde accrochée au mur que l'on ébranle. On prend des photos.

u = hauteur corde
pression au
champs électrique
sommet d'une vague

C'est la perturbation qui se transmet et non la matière

On définit la célérité de l'onde $c = \frac{dx_s}{dt}$

diagramme (x, t)



la caractéristique associée à S a pour équation $x_s(t) = x_0 + ct$

$$u(x, t) = u(x_0, 0) \quad \text{avec } x_0 = x - ct$$

$$\text{on a } u(x, t) = u(x - ct, 0)$$

Une onde qui semble dépendre de 2 variables et en fait une fonction qui dépend d'une seule variable " $x - ct$ " cachée

Quelle est l'équation vérifiée par u ? Cherchons à construire l'équation d'onde

$u(x, t)$ est fct° de $\xi = x - ct$

$$u(x, t) = u_0(\xi)$$

Calculons $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{du_0(\xi)}{d\xi} \times \underbrace{\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}}_1$ (a)

Dérivée partielle car dépend de 2 variables

dérivée d'une fct° qui dépend que d'1 variable

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{du_0(\xi)}{d\xi} \times \underbrace{\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t}}_{-c} \quad (b)$$

(a)-(b)

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

pas exactement car les milieux st isotrope cad si on change x en $-x$ alors on a la m° chose.

mais $c = \frac{dx}{dt}$ donc si on change x en $-x$ alors c change $-c$

donc $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ doit être vérifié (2)

Onde se propage dans un milieu isotrope donc doivent vérifier (1) et (2) cad (1) $\times$ (2) (onde va dans les deux sens)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \times \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) = 0 \times 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0}$$

Equation de propagation de d'Alembert.

L'équation de d'Alembert est LINÉAIRE.

⇒ si u_1 et u_2 st solut et $a \in \mathbb{R}$

alors $u_1 + a u_2$ est solut

⇒ si u_1 et u_2 st solut

alors He comb linéaire de u_1 et u_2 st solut.

⇒ He solut peut se décomposer en une comb linéaire de sinusoides = Thm de la transformée de Fourier
"Fourier est mon ami"

2. Relation de dispersion

On considère une solut harmonique

$$u(x, t) = u_0 \cos(kx - \omega t) \quad (*)$$

↑ ↑
2 variables
 x, t

↑ ↗
2 variable conjuguées
 k, ω
non indépendantes $\Rightarrow$ non indépendantes également

ω = pulsion

k = vecteur d'onde

(La relat° entre ω et k et la relat° de dispersion)

A quelle condition, $(*)$ est solut de l'équat° de d'Alembert ?

Etant donné que les solut st linéaires, on peut passer en complexe
(astuce pratique)

$$u(x, t) = u_0 \exp i(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i k u(x, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i \omega u(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 u(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 u(x, t)$$

L'équat° de d'Alembert devient en cplx

$$\left[ik^2 - \frac{1}{c^2} (i\omega^2) \right] u = 0$$

$$u(x, t) \text{ est solut ssi } \begin{cases} u = 0 \text{ soit } u_0 = 0 \text{ repos} \\ \text{(solut triviale)} \\ \omega^2 = k^2 c^2 \text{ soit } k = \pm \frac{\omega}{c} \end{cases}$$

La relation de dispersion est $\omega = \pm kc$

les solut s'ecrivent $u_+ = u_0 \cos \left[\frac{\omega}{c} (x - ct) \right] \quad (\omega = kc)$
onde vers droite sens +

$u_- = u_0 \cos \left[\frac{\omega}{c} (x + ct) \right] \quad (\omega = kc)$

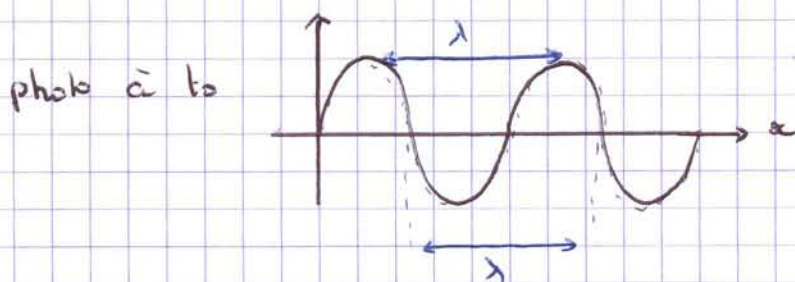
on ou plus generalment $u = \alpha u_+ + \beta u_-$ onde vers gauche sens -

Double periode

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \leftarrow \text{longueur d'onde}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \leftarrow \text{periode temporelle}$$

$$\omega = |k|c \Leftrightarrow \lambda = cT$$



Reqs : Pourquoi parle-t-on de relat de dispersion ?

$k^2 c^2 = \omega^2 \Rightarrow$ milieu non dispersif

La nom "relation de dispersion" est lié à la dispersion par un prisme car la célérité d'une onde dépend de sa fréquence $c(\omega) = \frac{c_0}{n(\omega)}$

$k^2 c_0^2 = n^2(\omega) \omega^2 \Rightarrow$ milieu dispersif.
 $\leftarrow$ propriété du milieu

Rq 2: $n(\omega)$ c'est la dispersion liée au milieu.

(5)

Il y a une dispersion liée aux conditions aux limites

Une corde de guitare accrochée aux 2 bouts, vibre que pour certaines fréquences, pulsato. La relation de dispersion est modifiée, certaines valeurs de k et interdites

II - Différentes ondes

1. Choix des variables

Concept unificateur $\Rightarrow$ l'ENERGIE (cf thermo)

$$dU = -p dV + \mu dN + B dH$$

$\uparrow \uparrow$

2 variables conjuguées

1 intensive = P

1 extensive = V

L'équation de d'Alembert est locale dans l'espace et le temps
donc va plutôt s'intéresser à la puissance.

électricité $P = u \cdot i$

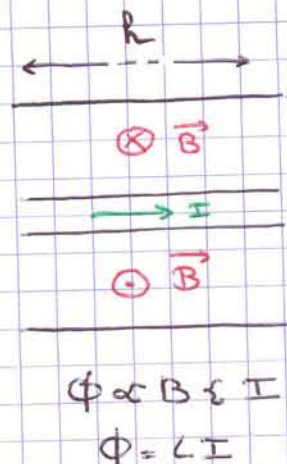
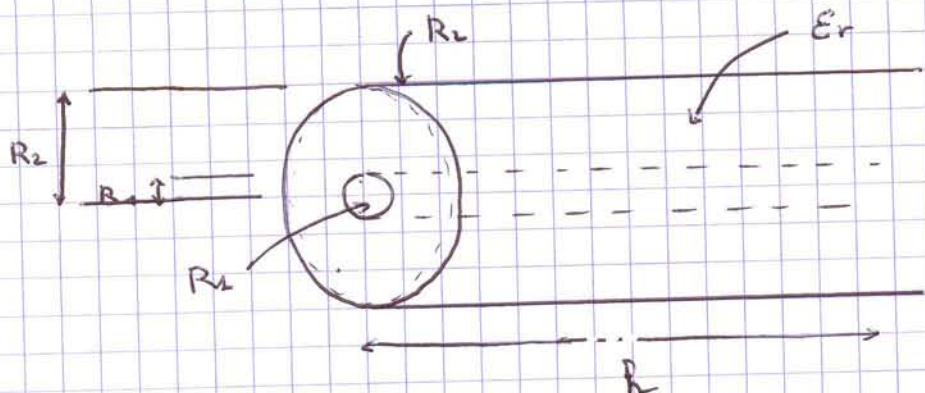
mécanique $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

thermo $P = P \times Sv$

électromagn $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

intensive
extensive

2. Electrodynamique = cable coaxiale



Condensateur cylindrique

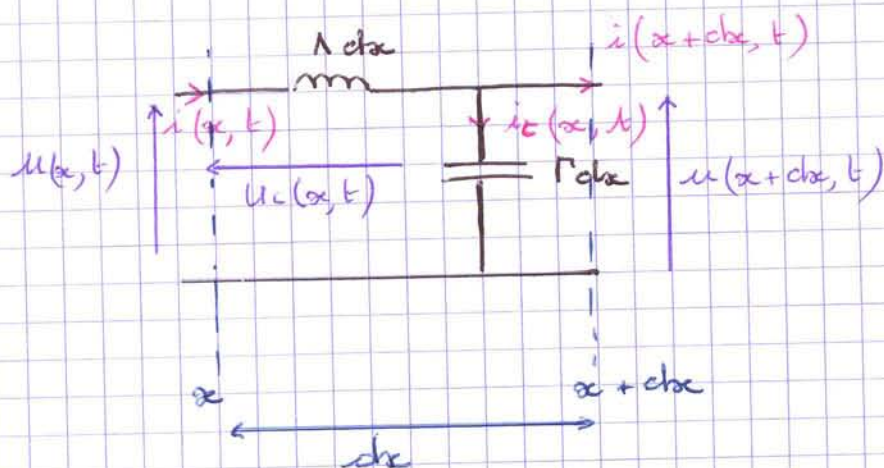
$$C = \frac{2\pi \epsilon \epsilon_r h}{\ln R_2/R_1} \quad h = \Gamma R$$

Γ = capacité/

Bobine cylindrique

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} h = \Lambda h$$

Λ = inductance / unité de long.



1^{ère} équation

Loi des mailles $\Rightarrow u(x,t) = u(x+dx,t) + u_c(x,t)$

$$\text{soit } -\frac{\partial u}{\partial x} dx = \Lambda dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

2^{ème} équation

Loi des nœuds $\Rightarrow i(x,t) = i(x+dx,t) + i_c(x+dx,t)$

$$\text{soit } -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} dx = \Gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} \approx \Gamma dx \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

(on néglige ordre 2)

On derive (1) $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}$
 par rapport à x

et on injecte (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial}{\partial t} \left(-\Lambda \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

On derive (1) $\Rightarrow$
 par rapport à x
 et on injecte (2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

équation de
d'Alembert

avec $\frac{1}{c^2} = \Gamma \Lambda$

Rq: $\frac{1}{c^2} = \Gamma \Lambda = \epsilon \epsilon_0 \mu_0 = \frac{\epsilon_0}{c_0^2}$ indépendant de la géométrie

$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0}}$ plastique $\epsilon \approx 2-3 \Rightarrow c \approx 200\,000 \text{ km.s}^{-1}$

Notion d'impédance

notion liée à la linéarité du pb, on peut utiliser des complexes et des signaux harmoniques (~~non~~ interdit non harmonique)

$$u = u_0 \exp \left[i \frac{\omega}{c} (x - ct) \right]$$

Rq: phase dans u_0 et i_0

$$i = i_0 \exp \left[i \frac{\omega}{c} (x - ct) \right]$$

$$(1) \quad i \frac{\omega}{c} u_0 = -\Lambda (-i\omega) i_0$$

$$u_0 = \underbrace{-\Lambda c}_{Z} i_0$$

$$Z = \frac{u_0}{i_0} = \Lambda c = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

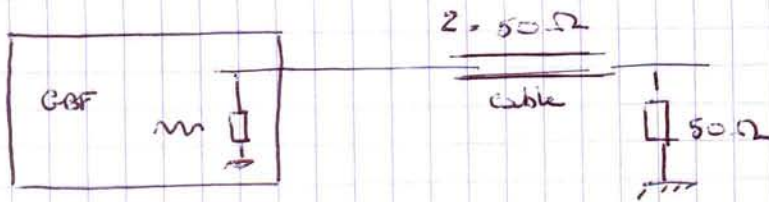
impédance

Rq: dépend de la géométrie (R_1, R_2)

$Z \in \mathbb{R}$ car suppose u et i en phase

en pratique
 $= 50 \Omega$

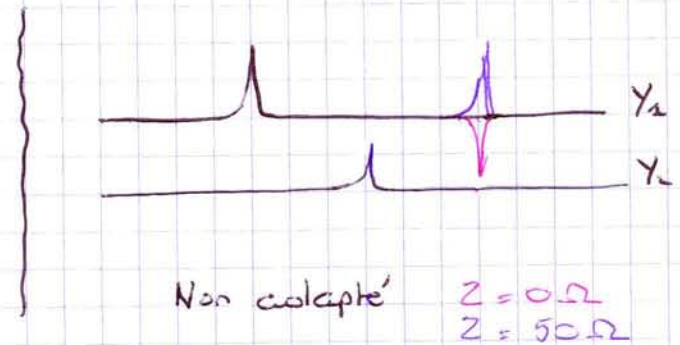
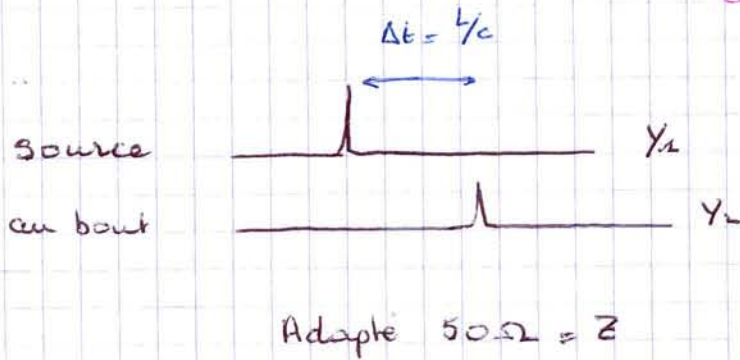
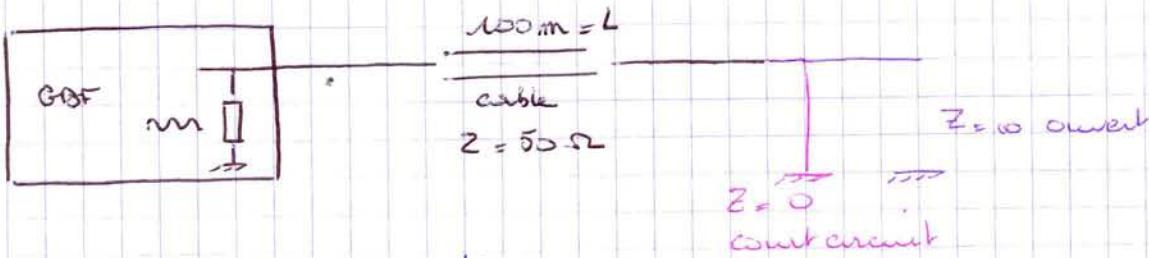
$Z = 75 \Omega$ TV



On met un branchon $50\ \Omega$ on fait une adaptation d'impédance (8)

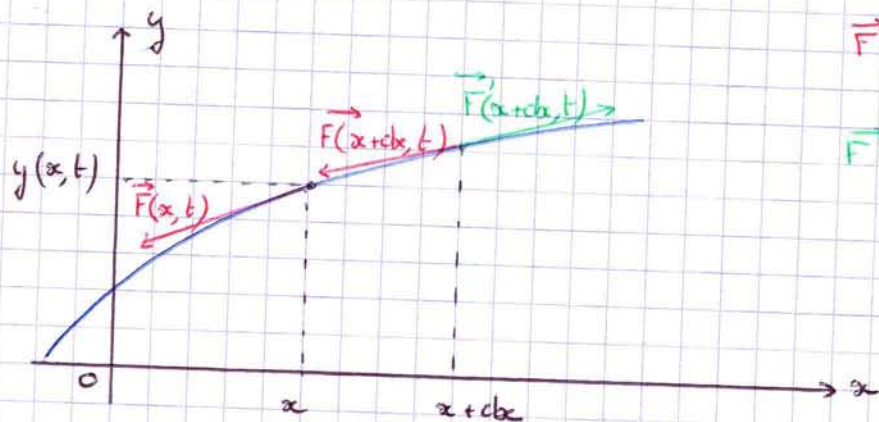
On est dans une situation "matchée", on a la transmission maximale de puissance.

MANIPULATION



Reflexion si on a un court d'impédance positif ou négatif.

la corde



$\vec{F}$ = force de la partie gauche sur la partie droite

$\vec{F}'$ = — gauche — — droite —

Les variables énergétiques sont $\vec{F}$ et $\vec{v}$ mais on ne choisiera pas exact^h celles-ci.

1^{ère} équation

PFID sur un élém^t de corde $dm = \mu dx$

$$\mu dx \frac{\partial \vec{v}(x, t)}{\partial t} = \vec{F}(x, t) + \vec{F}'(x+dx, t) = \vec{F}(x, t) - \vec{F}(x+dx, t)$$

μ = masse linéique

on projette sur Ox $\mu dx \frac{\partial v_x}{\partial t} = F_x(x, t) - F_x(x+dx, t)$

or $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$ car on a un mov vertical.

donc $F_x(x, t) = F_x(x+dx, t) = T_0$ tension de corde

on projette sur Oy $\mu dx \frac{\partial v_y}{\partial t} = F_y(x, t) - F_y(x+dx, t)$

$$\mu dx \frac{\partial v_y}{\partial t} = - \frac{\partial F_y}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial v_y}{\partial t}$$

2^{ème} équation

astuce : on veut

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

or $\frac{\partial y}{\partial x} = \tan \alpha \approx \alpha$

$\vec{F}$ est tangente à la corde d'où

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{-F_x} = -\frac{F_y}{T_0} = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{1}{T_0} \frac{\partial F_y}{\partial t}$$

on a donc $\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial v_y}{\partial t}$ et

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{1}{T_0} \frac{\partial F_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right) = -\mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = -\frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_y}{\partial t} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v_y = 0$$

3. Méca flux - acoustique

à 3D au repos $\left\{ \begin{array}{l} P_0 \\ \rho_0 \\ \vec{v}_0 = \vec{0} \end{array} \right.$

au passage de l'onde $\left\{ \begin{array}{l} P_0 + P_1 \\ \rho_0 + \rho_1 \\ \vec{v}_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} P_1 \ll P_0 \\ \rho_1 \ll \rho_0 \end{array}$

ds ref galiléen du fluide

1^{ère} équation
PFD en méca flux : Equation d'Euler

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{vol} \quad \text{on néglige les forces volumiques poids, par champs électriques}$$

$$\frac{D}{Dt} = \text{dérivée particulaire} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}$$

$$(\rho_0 + \rho_1) \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 \right] = -\vec{\nabla} (p_0 + p_1) \quad \begin{array}{l} \text{1^{er} \text{ ordre} \\ \text{2^{ème} \text{ ordre} \end{array}}}$$

$$\vec{\nabla} p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$$

2^{ème} équation : "tauteur" = $\frac{1}{\text{compressibilité}}$

χ = le volume varie qd on fait varier la pression
variation inverse, et il faut le rendre intensif

$$\chi = - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$$

or $\rho = \frac{dn}{dV}$ d'où $\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dV}{V}$ donc $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s$
c-à-d 1/V

transp est isentropique

Y'a pas le popage sur de longue distance, pas de dissipation $\Rightarrow$ réversible
Échange de chaleur n'ont pas lieu $\Rightarrow$ adiabatique

$$\chi_s = \frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \frac{\rho_1}{P_1} \Rightarrow \rho_1 \cdot \rho_0 \chi_s P_1$$

Pb: on a 3 variables couplées donc il faut une 3^{ème} eq. $\rho \leftrightarrow P$
on a entre $\vec{v}$ et P (Euler), entre ρ et P (χ_s)
il manque entre ρ et $\vec{v}$ (conservation masse ou continuité)

3^{ème} équation : ce qui rentre - ce qui sort = ce qui reste
qui peut diverger

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}}_{\text{div}} = 0$$

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\rho_0 + \rho_1) \vec{v}_1) = 0$$

3^{ème} ordre

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \rho_0 \vec{v}_1$$

$$\frac{\partial (\rho_0 \chi_s P_1)}{\partial t} = - \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_s} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1$$

Pour la pression

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} &= - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{v}_1 \\ &= - \frac{1}{\chi_s} \vec{\nabla} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \\ &= - \frac{1}{\chi_s} \vec{\nabla} \left(- \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P_1 \right) \\ &= \frac{1}{\rho_0 \chi_s} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} P_1\end{aligned}$$

or $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} P = \vec{\nabla} \cdot \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = a_x \\ \frac{\partial P}{\partial y} = a_y \\ \frac{\partial P}{\partial z} = a_z \end{cases}$ soit $\vec{\nabla} \vec{\nabla} P = \vec{\nabla} \vec{a}$

or $\vec{\nabla} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta P$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_s} \Delta P_1$$

$\chi_s = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s$

$P V^\gamma = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte}$
Laplace

d'où $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = \frac{\rho}{\gamma P} \approx \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \Rightarrow \chi_s = \frac{1}{\gamma P_0}$

eq GP $\Rightarrow P_0 = \frac{\rho_0 R T_0}{M}$ donc $\chi_s = \frac{M}{\gamma R T_0 \rho_0}$ or $C_s = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$

$\Rightarrow C_s = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$ pour GP isotherme

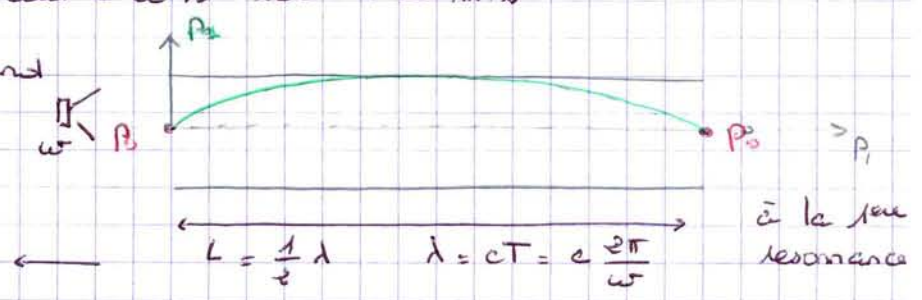
$C_s = 340 \text{ m.s}^{-1}$

si isotherme $\gamma = 1,4$ remplacé par $\gamma = 1$
cad - 20% soit $\approx 50 \text{ m.s}^{-1}$.

Pesure avec le tube de Kund

on trouve plutôt 340 m.s^{-1}

on déduit c (ω connu
 L connu)



4. Onde électromagnétique

Équations Maxwell

$$\text{MG} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

^{*}
($\vec{B}$ monopole magn.)

$$\text{MF} \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{MF} \quad \text{div } \vec{B} = 0^*$$

dans le vide $\rho = 0$
 $\vec{j} = \vec{0}$

$$\text{MA} \quad \text{rot } \vec{B} = \cancel{\mu_0 \vec{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

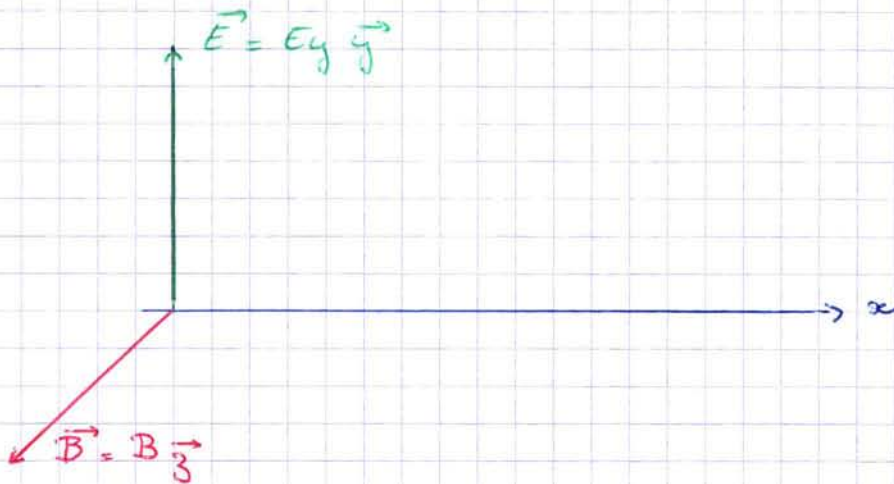
constant de déplacement (constante de la charge)

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$



Les variables choisies st tq leur produit soit une puissance, ici $(\vec{E}, \frac{\vec{B}}{\mu_0})$
car $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

(14)

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{selon } z \text{ seulement}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} = - \mu_0 \frac{\partial B / \mu_0}{\partial t}$$

$$\text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{selon } y \text{ seulement}$$

$$\cancel{\frac{\partial B_x / \mu_0}{\partial z}} - \frac{\partial B_z / \mu_0}{\partial x} = \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$Z = \frac{E_0}{B_0 / \mu_0}$$

$$Z = \mu_0 \frac{E_0}{B_0}$$

$$Z = \mu_0 c = 377 \, \Omega$$

III. Aspects énergétiques

(15)

Faire un bilan local, c'est faire une équation de continuité.

1. Equation de continuité

Soit G une grandeur extensive q_G

On y associe une densité volumique qui est intensive $g = \frac{\delta G}{\delta V}$

$$\delta G = g \delta V$$


G	N	$Q = Nq$	$M = Nm$	E
g	m	$q_m = \rho_e m m = \rho$		énergie
δG	0	0	0	δe
$\vec{j}_G$	$m \vec{v}$ $= \vec{j}$	$\rho_e \vec{v}$ ρ_m	$\rho \vec{v}$	$e \vec{v}$

En courant de chaleur même si on ne peut pas définir une vitesse de chaleur.

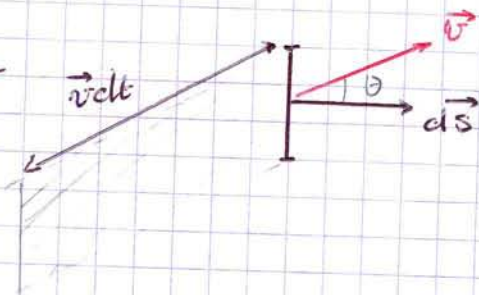
δG peut varier si il y a + des créations avec δG le taux de création $\delta G = \delta G \delta V dt$

En general $\delta G = 0$ si pour N s'il y a réaction χq conservat charge invariable

si pour M s'il y a relativité $E = mc^2$

+ des échanges avec $\vec{j}_G$ la densité est

Ce qui passe
peut être
à travers
 dS

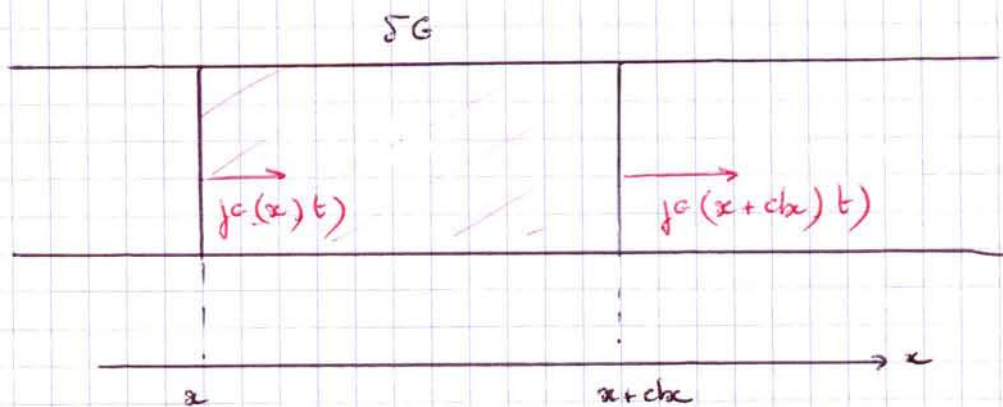


$$dN = n dV$$

$$= n v dt dS \cos \theta$$

$$\delta N = \underbrace{m \vec{v}}_{\vec{j}_N} dS dt$$

Bilan de G à 1D



Pendant dt $d(\delta G) = \text{"entrant"} - \text{"sortant"} + \text{produit}$

$$d(\cancel{g} d\cancel{S} dt) = \cancel{j_G(x)} d\cancel{S} - \cancel{j_G(x+dx)} d\cancel{S} + \cancel{\delta G} \cancel{dx} d\cancel{S} dt$$

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial j_G(x,t)}{\partial x} + \delta G$$

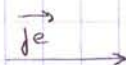
$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial j_G}{\partial x} = \delta G$$

= 0 si la g.dem est conservée (exple Q)

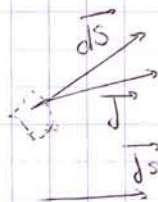
Cas général

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_g = \delta G$$

'équation continuité'



m



$\vec{j}$ et $d\vec{S}$ m ss $\Rightarrow$ sort

$\vec{j}$ et $d\vec{S}$ ss $\neq \Rightarrow$ entre

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = \sigma$$

5

energie crește

(1)

équation de continuité
de l'énergie

2. Amplitude associée

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} \rightarrow \text{ampli } y$$

A diagram showing a rectangular domain on a grid. The horizontal axis is labeled x at the left and $x + clse$ at the right. The vertical axis is labeled y at the bottom and $y + clse$ at the top. The domain is bounded by these lines. The interior of the rectangle is filled with diagonal lines. Above the rectangle, the expression $\mathcal{G}(x, t)$ is written with an arrow pointing to the right.

$$v_1 = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \leadsto \text{ampl } \xi$$

you can use pour DEPI

3 Propagation de l'énergie

Pour le cable

$$e = e_c + e_p \\ = \frac{1}{2} \Gamma u^2 + \frac{1}{2} \Lambda i^2$$

onde dans milieu

$$c \\ Z = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

$$i = i_0 f(x - ct)$$

$$u = Zi = \underbrace{Z i_0}_{u_0} f(x - ct)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle e_p \rangle_t &= \frac{1}{2} \Gamma \langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} \Gamma u_0^2 \langle f(x - ct)^2 \rangle \\ \langle e_c \rangle_t &= \frac{1}{2} \Lambda \langle i^2 \rangle = \frac{1}{2} \Lambda i_0^2 \langle f(x - ct)^2 \rangle \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \langle e \rangle_t = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \Gamma u_0^2 + \frac{1}{2} \Lambda i_0^2 \right)}_{e_0} \underbrace{\langle f(x - ct)^2 \rangle}_{F(x - ct)}$$

$\Rightarrow$ l'énergie est donc une onde qui se déplace à la célérité c
 (⚠ le milieu est non dispersif, $c = c_0 \forall \omega$)

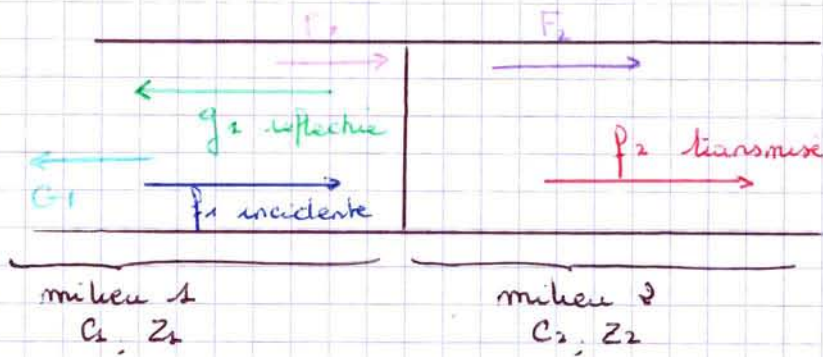
$$e_p^0 = \frac{1}{2} \Gamma u_0^2 = \frac{1}{2} \Gamma Z^2 i_0^2 = \frac{1}{2} \Gamma \frac{\Lambda}{\Gamma} i_0^2 = \frac{1}{2} \Lambda i_0^2 = e_c^0$$

On a équilibre de l'énergie sous forme cinétique et potentielle:

$$\langle e_c \rangle = \langle e_p \rangle$$

4. Coefficients de réflexion, transmission

! coeff depend de la gdeur étudiée, P , v ...



ASTUCE

On s'intéresse à l'onde de vitesse

$$\begin{cases} v_1(x, t) = f_1(t - x/c_1) + g_1(t + x/c_1) \\ \quad \text{progressive} \quad \quad \text{regressive} \\ v_2(x, t) = f_2(t - x/c_2) \end{cases}$$

on prend

$t - \frac{x}{c}$ au lieu de $x - ct$

Il y a continuité de v en $x=0$

$$v_1(0, t) = v_2(0, t) \quad (1)$$

" " de p " "

$$P_1(0, t) = P_2(0, t) \quad (2)$$

$$(1) \quad f_1(t) + g_1(t) = f_2(t)$$

$$(2) \text{ sachant que } p = Zv \text{ on a } Z_1 f_1(t) - Z_1 g_1(t) = Z_2 f_2(t)$$

$$Z_1(1) + (2) \Rightarrow 2Z_1 f_1(t) = (Z_1 + Z_2) f_2(t)$$

$$\Rightarrow f_2(t) = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} f_1(t)$$

$\Rightarrow$ Dans milieu 2, l'onde f_2 a la même forme que f_1

$$Av = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} > 0$$

$$Z_2(1) - (2) \Rightarrow (Z_2 - Z_1) f_1(t) + (Z_2 + Z_1) g_1(t) = 0$$

$$\Rightarrow g_1(t) = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} f_1(t)$$

$\Rightarrow$ Dans milieu 1, l'onde g_1 a la même forme que f_1

$$Av = \frac{(Z_1 - Z_2)}{(Z_1 + Z_2)} > 0 \text{ ou } < 0 \rightarrow \text{déphasage } \pi$$

- Démonstration pour une onde régressive du signe -

$$u = u_0 \cos \left(\omega \left(t + x/c \right) \right)$$

$$i = i_0 \cos \left(\omega \left(t + x/c \right) \right)$$

en complexe $\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow u_0 \left(+ j \frac{\omega}{c} \right) = -\Lambda i_0 (j\omega)$

$$\Rightarrow \frac{u_0}{i_0} = Z + \Lambda c$$

On s'intéresse à la pression

$$F_1 = Z_1 p_1$$

$$G_1 = \ominus Z_1 q_1 \quad ! \text{ régressive}$$

$$F_2 = Z_2 F_2$$

$$p_2 = t_r p_1$$

$$q_1 = r_v p_1$$

- $p_2 = t_r p_1 \Rightarrow \frac{F_2}{Z_2} = t_r \frac{F_1}{Z_1} \Rightarrow F_2 = \underbrace{\frac{Z_2}{Z_1} t_r}_{t_p} F_1$

$$t_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- $q_1 = r_v p_1 \Rightarrow -\frac{G_1}{Z_1} = r_v \frac{F_1}{Z_1} \Rightarrow G_1 = -\underbrace{r_v}_{r_p} F_1$

$$r_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

Rq sur OEN $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{Z_0}{n}$

$$r_E = \frac{Z_0 \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}}{Z_0 \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$< 0 \text{ si } m_2 > m_1$$

déphasage de π à la réflexion vitreuse

Formules de Fresnel.

⚠ pour $\vec{B}$, c'est λ_v et λ_w

(21)

On s'intéresse au coef de réflexion de l'énergie ^{du} flux d'énergie j

$$j = p \times v$$

$$R_j = \frac{(pv)_r}{(pv)_i} = \frac{p_r}{p_i} \times \frac{v_r}{v_i} = \lambda_p \times \lambda_v = -\lambda_v^2$$

$$R_j = -\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

"-" $\Rightarrow$ l'onde réfléchie se propage à l'inverse de l'onde incidente

$$T_j = \frac{(pv)_t}{(pv)_i} = \frac{p_t}{p_i} \times \frac{v_t}{v_i} = \lambda_p \times \lambda_v$$

$$T_j = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

On a du point de vue énergétique

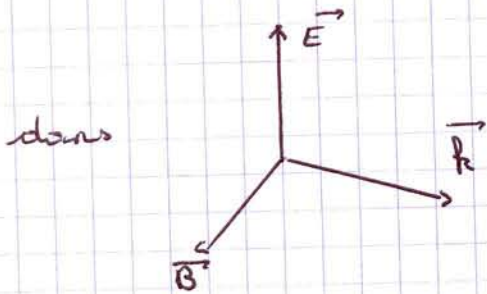
$$|R| + T = 1 \Rightarrow \text{conservation de l'énergie}$$

IV Dispersion

modèle de drude Lorentz = OEN dans un plasma

e^- : charge $-e$, masse m
 ions : " $+e$ " $M \gg m$

} n par unité de volume



$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\frac{v}{c} \vec{E} \ll \vec{E}} \right) \quad \text{approx non relativiste}$$

mais $\|\vec{E}\| = \|\vec{B}\| c$

$$\frac{E}{B/\mu_0} = Z_0 = \mu_0 \frac{E}{B} = \mu_0 c$$

de plus $\vec{J} = n \left(\underbrace{-e \vec{v}}_{e^-} + \underbrace{+e \vec{V}}_{\text{ions}} \right) \ll \text{car } n \frac{m}{V} \ll n \vec{v}$

PFID $\rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{ne^2 \mu_0}{m} \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{ne^2 \mu_0}{m} \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{ne^2 \mu_0}{m}} \vec{E} = \vec{0}$$

(23)

on pose $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$

$$\vec{\nabla} \leftrightarrow i\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega$$

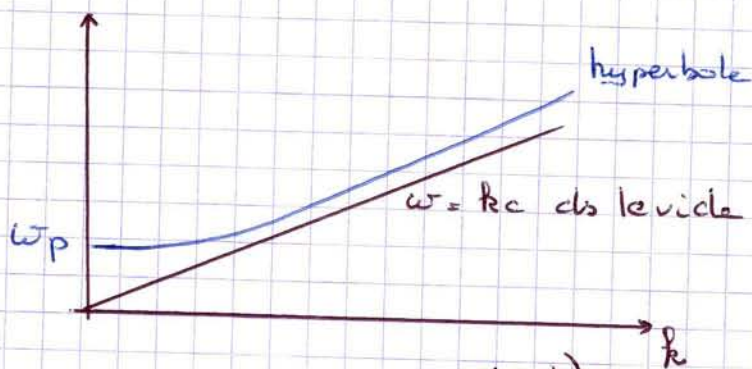
$$\left((i\vec{k})^2 - \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 - \frac{ne^2 \mu_0}{m} \right) \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) = 0$$

d'où les solutions $\vec{E}_0 = \vec{0}$

ou $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2 \mu_0 c^2}{m c^2}$

avec $\omega_p^2 = \frac{ne^2 \mu_0}{m} c^2 = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\epsilon_0}$ pulsat plasma

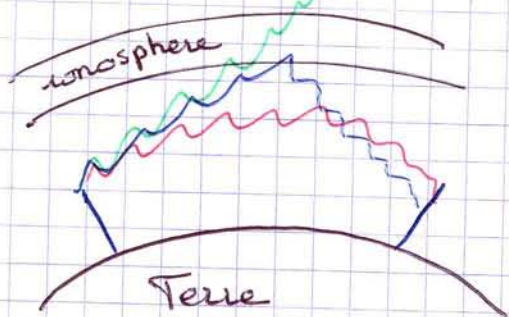
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \quad \text{relat° de dispersion}$$



si $\omega > \omega_p$ alors $\exists k \in \mathbb{R}^{(\text{real})}$ l'onde se propage

si $\omega < \omega_p$ alors $\exists k \in i\mathbb{R}^{(\text{imaginaire})}$ l'onde est évanescente
 $e^{i(kx - \omega t)} \rightarrow e^{-Kx} e^{-i\omega t}$ avec $k = iK$ $K \in \mathbb{R}$

A basse fréquence l'onde est réfléchi* (onde courte)



Rq: on cherche une solut sous la forme $e^{i(kx - \omega t)}$ (24)
avec ici k et ω qeq

si on injecte ds l'equat° de propagat°

alors on trouve la relat° de dispers° $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$

donc k et ω ne st pas qeq $k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

les solut st unique^t de la forme $e^{i(k(\omega)x - \omega t)}$

ou $e^{i(k(\omega) [x - \underbrace{\omega/k(\omega)}_{C_g} t])}$

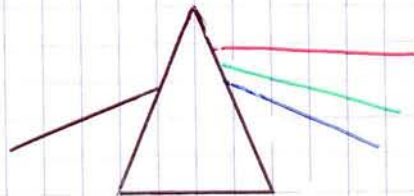
La célérité de l'onde de pulsat° ω est

$$C_g = \omega / k(\omega)$$

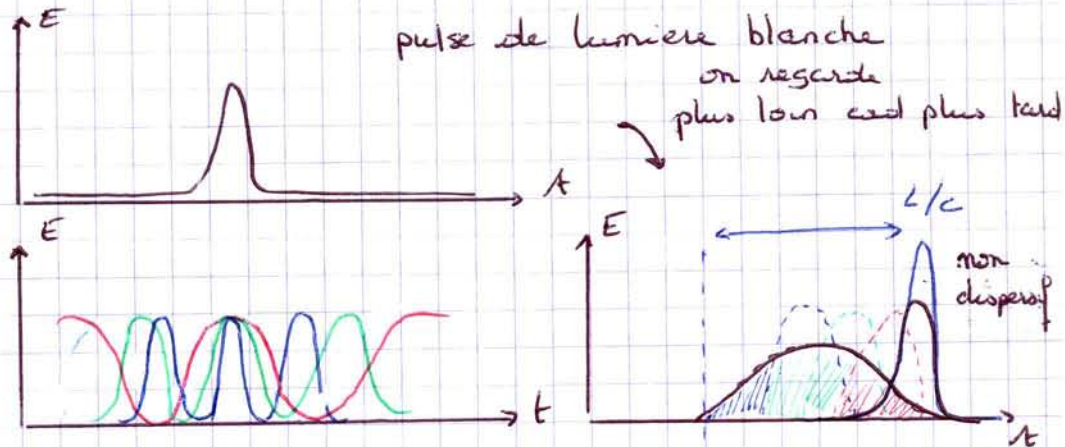
$$C_g = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Des ondes de $\omega \neq$ ont des $C_g \neq \Rightarrow$ dispersion

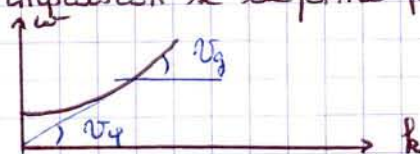
Dispersion spatiale:



Dispersion temporelle



Si le milieu est peu dispersif alors l'impulsion se déforme peu mais le sommet se déplace à $v_g = d\omega/dk$



ANNEXE 1

Pour les onde EM, les "bonnes" variables ne sont pas E et $\frac{B}{\mu_0}$,
quelles sont-elles ?

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{B}{\mu_0} \right)^2$$

Ici $\mathcal{E}$ est exprimé en fct° des chps $\vec{E}$ et $\vec{B}$, essayons de plutôt
l'exprimer en fct° des potentiels V et $\vec{A}$

on a d'après les équats de Maxwell $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \nabla \wedge \vec{A}$

$$\vec{E} = \underbrace{-\text{grad } V}_{\text{electrostat}} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{induct}} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

En une note de potentiel à des chs près, on choisit la Jauge de Coulomb

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

cad dans l'espace de Fourier où $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{\mathcal{A}}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$

on a $i \vec{k} \cdot \vec{\mathcal{A}} = 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{A}} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{\mathcal{A}}$ transverse

or $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ donc $\vec{B}$ est transverse

$$\text{Donc } \underbrace{\vec{B} = \vec{B}_\perp}_{\text{onde}} \text{ et } \underbrace{\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp}_{\substack{\text{electrostat} \quad \text{onde}}} \quad \leftarrow \quad E_\perp = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{On a donc } \mathcal{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_\perp^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{B_\perp}{\mu_0} \right)^2$$

$$\mathcal{E}(\text{jauge coulomb}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \vec{A})^2$$

On montre ainsi que les "bonnes" variables sont

extensive "vitesse" $\rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

intensive " " $\rightarrow \text{rot } \vec{A}$

On remarque que dans le cas de la jauge de Coulomb l'énergie du chps EM correspond à l'énergie d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = kc$

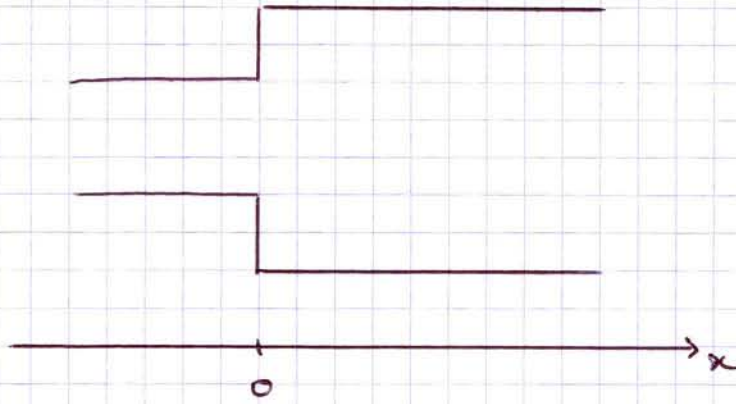
$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \quad // \quad E = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{A})^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2$$

Les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique st quantifiés
de même les niveaux d'énergie de l'OEM st quantifiés
le quanta d'énergie est le photon $\hbar \nu$

$$E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \nu$$

↳ nbr de photo de vecteur d'onde $\vec{k}$

Exo des 3 tuyaux en acoustique ou cable coaxial court circuité ou ouvert



$$Z_0 = \frac{P_1}{v_1}$$

impédance spécifique
on a perdu la notation
de surface du tuyau

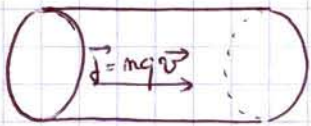
Analogie acoustique / électrique

$$\vec{F} = -q \vec{\nabla} v$$

μ

$$\vec{F} = -\nabla P_1$$

P_1



$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS = mqvS$$

$$v_1 S = \text{debit}$$

$$Z = \frac{\mu}{I}$$

$$Z_h = \frac{P}{Sv} = \frac{Z_0}{S}$$

sq $S \leftrightarrow n$ (optique)

$$\lambda_p = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$$

$$\lambda_p = \frac{2S_1}{S_1 + S_2}$$

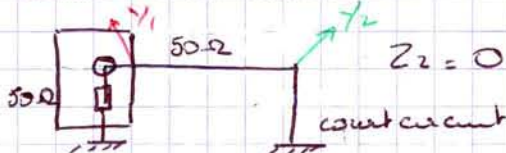
Cas limite 1

tuyau ouvert

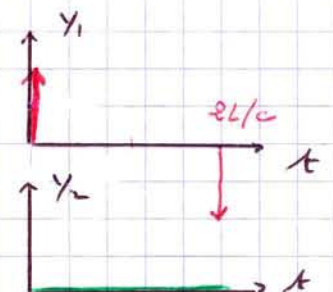
$$\Rightarrow S_2 = \infty \Rightarrow Z_2 = 0 \Rightarrow \lambda_p = -1$$

$$p = p_0 + \delta p = p_0 \Rightarrow \delta p = 0 \text{ or } \delta p = Z_2 v \text{ donc } Z_2 = 0$$

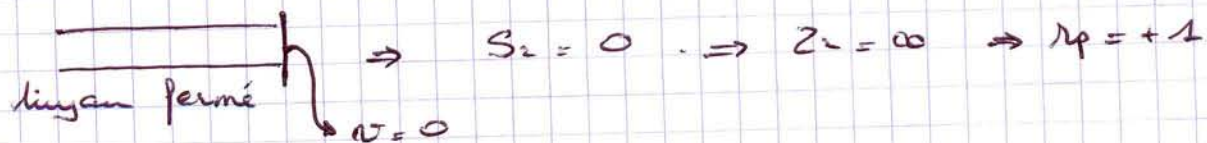
cable court circuit



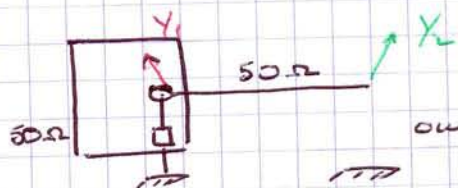
$$Z_2 = 0 \Rightarrow \lambda_p = -1$$



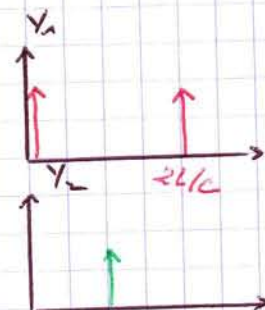
Cas limite 2



cable ouvert



ouvert $Z_2 = \infty \Rightarrow \Gamma_m = +1$



	intensive	extensive	équation n°1	équation n°2	équation de propagation d'Alembert	valeur C	importance $Z = \frac{\text{extensive}}{\text{extensive}}$	mesures	inertie	E_c $\frac{1}{2} \times \text{vitesse}^2 \times \text{extensive}$	E_p $\frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{vitesse}^2} \times \text{extensive}$	j	amplitude
axial elect	μ	i	$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$ <i>maître</i>	$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial i}{\partial x}$ <i>maître</i>	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$	$\frac{1}{\Lambda \Gamma}$	$\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$	$\frac{1}{\Gamma}$	Λ	$\frac{1}{2} \Lambda i^2$	$\frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma} \mu^2$	$\mu \cdot i$	q
onde méca	F_y	v_y	$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial v_y}{\partial t}$ <i>PTD</i>	$\frac{\partial F_y}{\partial t} = -T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$ <i>PTD</i>	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$	$\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$	$\sqrt{\mu T_0}$	T_0	μ	$\frac{1}{2} \mu v_y^2$	$\frac{1}{2} \frac{1}{T_0} F_y^2$	$F_y \cdot v_y$	q
son	p_1	v_1	$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}$	$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\chi_s \frac{\partial v_1}{\partial x}$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$	$\frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$	$\sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}}$	$\frac{1}{\chi_s}$	ρ_0	$\frac{1}{2} \rho_0 v_1^2$	$\frac{1}{2} \frac{1}{\chi_s} p_1^2$	$p_1 \cdot v_1$	ξ
acoustiq				$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial \xi}{\partial t}$				χ_s		$\frac{1}{2} \chi_s p_1^2$			
DEM	E_y	B_y / μ_0	$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial B_y}{\partial t}$	$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial B_y}{\partial x}$	$\Delta - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$			$\frac{1}{\epsilon_0}$	μ_0	$\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{B_y}{\mu_0} \right)^2$	$\frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0} E_y^2$	$E_y \cdot \frac{B_y}{\mu_0}$	$?$
								ϵ_0		$\frac{1}{2} \epsilon_0 B_y^2$	$\frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0} E_y^2$	$E_y \cdot \frac{B_y}{\mu_0}$	$?$

Un milieu est caractérisé par sa rigidité et son inertie $\rightarrow \sqrt{\text{rigidité/inertie}} = C$ $\sqrt{\text{rigidité} \times \text{inertie}} = Z$

La propagation dans ce milieu est caractérisée par le produit et le rapport de la rigidité et de l'inertie

$j = p_a \cdot v_a$
 $[j] = [p_a v_a] = \left[\frac{Fv}{S} \right] = \left[\frac{P_{\text{moy}}}{S} \right]$ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

$\Rightarrow$ on parle d'intensité acoustique ou "d'éclairement" acoustique.

on définit $I = \langle |p_a v_a| \rangle = \frac{1}{3} p_a^{\text{max}} v_a^{\text{max}}$ si ω fixé

également $I_{\text{dB}} = 10 \log \frac{I}{I_0}$ avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ le seuil d'audibilité.

et enfin $I^{\text{seuil}} = 1 \text{ W/m}^2$ $I_{\text{dB}}^{\text{seuil}} = 120 \text{ dB}$ le seuil de douleur.