

1 Ondes Électromagnétiques

1.1 Ondes électromagnétiques au lycée

1.1.1 Comparaison des différentes ondes rencontrées

1. Sur quelles principales différences entre les ondes électromagnétiques et les ondes sonores insisteriez vous devant vos élèves ?
2. Proposer une expérience de cours permettant de mettre facilement en évidence une de ces différences.

1.1.2 Sources lumineuses utilisées en travaux pratiques

Parmi les sources lumineuses utilisées dans les lycées figurent en bonne place les diodes laser rouge et les lasers HeNe.

3. Rappeler la signification de l'acronyme LASER et la date à laquelle est apparu le premier laser.
4. Donner les caractéristiques du rayonnement laser.
5. Citer des expériences d'enseignement qui sont facilitées par l'utilisation d'un laser ou pour lesquelles un laser présente un (des) avantage(s) par rapport à l'utilisation d'autres sources de lumière. Précisez à chaque fois quelles sont les caractéristiques du rayonnement laser qui sont mises à profit.
6. Les élèves posent parfois les questions suivantes :
 - Quelle différence y a-t-il entre la diode laser rouge utilisée en travaux pratiques d'optique et la LED qui est utilisée dans les montages d'électricité ?
 - Et entre la diode laser (qu'ils utilisent) et le laser HeNe (utilisé par le professeur) ?
 Rédigez en quelques lignes les explications qu'il est possible de donner à des élèves de seconde. Que peut-on dire de plus à des élèves de terminale scientifique ?

1.2 Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

1.2.1 Équation de propagation

7. Écrire les équations de Maxwell. On notera ρ la densité volumique de charge et $\mathbf{j}$ le vecteur densité de courant électrique.
8. Montrer qu'en l'absence de toute charge et courant, le champ électromagnétique est solution des *équations de propagation* :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (2)$$

et préciser le lien qui existe entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.

9. Montrer que les équations de propagation admettent des solutions en *ondes planes monochromatiques* où le champ électrique est donné par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \mathbf{u} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (3)$$

où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire.

10. Préciser dans ce cas particulier l'expression du champ magnétique.
11. Préciser la relation entre ω et $\mathbf{k}$. Donner quelques exemples numériques de valeur de ω en précisant pour chacun le domaine physique ou technologique concerné.
12. Expliquer la dénomination *plane* pour cette onde.
13. Expliquer de même le terme *monochromatique*.
14. Une onde plane peut-elle ne pas être monochromatique ?
15. Donner l'interprétation du vecteur $\mathbf{u}$.
16. Proposer une expérience de cours mettant en évidence le caractère vectoriel des ondes électromagnétiques.

1.2.2 Aspect énergétique

On appelle *vecteur de Poynting* $\mathbf{R}$ le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique, on admettra que ce vecteur est donné par :

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (4)$$

17. Proposer une expérience de cours montrant qu'une onde électromagnétique transporte de l'énergie.
18. On appelle *intensité* d'une onde électromagnétique, notée I , la puissance moyenne (sur quelques périodes) qu'elle transporte à travers une section droite d'aire unité. Exprimer l'intensité de l'onde décrite par l'équation (3) en fonction de E_0 .

1.2.3 Milieux diélectriques

19. Qu'appelle-t-on un milieu diélectrique ?
20. Comparer la distance caractéristique qui sépare les charges dans un milieu diélectrique et la longueur d'onde typique de la lumière.
21. En déduire une justification de l'approximation mésoscopique du champ macroscopique : on remplace les champs électrique et magnétique réels par leur moyenne sur un volume de taille intermédiaire.

Dans cette approximation, la densité de charge qui intervient dans les équations de Maxwell apparaît comme la divergence du *vecteur polarisation* ($\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}$) dont on admettra ici (milieu linéaire isotrope) qu'il peut s'écrire :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} \quad (5)$$

où ϵ_r est une constante appelée *permittivité diélectrique relative* du milieu. Si de plus le milieu est non magnétique et suffisamment homogène, l'équation de propagation (1) devient simplement :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

avec $n^2 = \epsilon_r$.

22. Que représente n ?
23. Cette équation peut-elle représenter la propagation de rayons X dans un milieu matériel ? (Justifiez votre réponse)

2 Ondes sonores

2.1 Ondes au lycée

Pour répondre aux questions de cette partie il peut être utile de consulter les extraits des programmes des classes de seconde, premières S et terminale S figurant en annexes (1, 2 et 3).

Dans la suite, nous allons aborder l'étude théorique des ondes de densité et de pression qui peuvent se propager dans un milieu compressible comme un gaz. Dans un premier temps nous ne considérerons que des transformations réversibles et établirons l'équation de propagation des ondes dans l'approximation acoustique, et nous en examinerons l'aspect énergétique. Dans un deuxième temps nous prendrons en compte le caractère irréversible des transformations que subit le milieu lors du passage de l'onde et montrerons que cette irréversibilité est responsable d'une atténuation de l'onde.

2.2 Propagation

On considère un milieu compressible, comme un gaz, de masse volumique ρ_0 , et soumis à une pression uniforme p_0 dans laquelle se propage dans la direction z une onde plane. Sous l'action de cette onde, le milieu se déforme, la masse volumique devient $\rho(z, t) = \rho_0 + \eta(z, t)$ et la pression devient $p(z, t) = p_0 + \pi(z, t)$.

Pour décrire la déformation du milieu, nous allons isoler par la pensée une tranche d'épaisseur infinitésimale dz et nous écrirons que cette tranche est déplacée de $\xi(z, t)$. Nous emploierons pour décrire la géométrie du problème les notations de la figure 2, de telle sorte qu'en même temps qu'elle est déplacée la tranche voit son épaisseur passer de dz à $dz + d\xi$. On pourra introduire la vitesse de la tranche $\mathbf{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \mathbf{e}_z$ où $\mathbf{e}_z$ est un vecteur unitaire selon z .

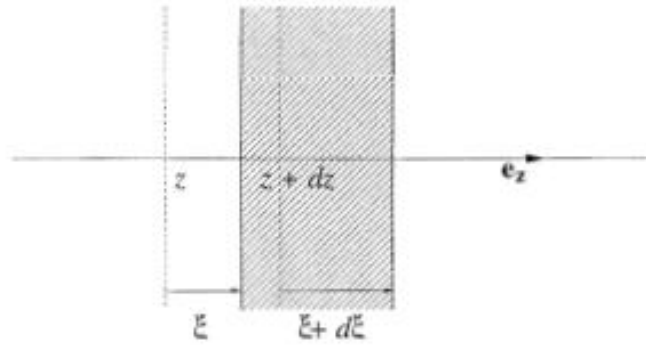


FIG. 2: Déplacement d'une tranche du milieu sous l'action d'une onde sonore.

11. Calculer la force qui s'exerce sur la tranche de milieu par unité de surface, et montrer qu'elle vaut :

$$dF = - \frac{\partial \pi}{\partial z} \Big|_{z+\xi} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) dz \quad (7)$$

12. Montrer qu'elle vaut aussi (à des infiniment petits d'ordre dz^2 près) :

$$dF = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dz \quad (8)$$

On appelle χ la *compressibilité adiabatique* du milieu :

$$\chi = - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_S \quad (9)$$

où l'indice S signifie "à entropie constante".

13. Justifier que lors du passage d'une onde sonore, on peut considérer la transformation que subit le milieu comme adiabatique.
14. Montrer alors que :

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = - \frac{1}{\chi} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}} \quad (10)$$

Dans toute la suite du problème, nous ferons l'approximation acoustique consistant à négliger dans les équations $\partial \xi / \partial z$ devant 1.

15. Expliquer sans calcul la signification physique de cette approximation.
16. Dans le cadre de cette approximation, déduire des équations précédentes l'équation de propagation des ondes acoustiques :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

17. Donner l'expression de C . Que représente cette grandeur ?
18. Donner sa valeur en fonction des grandeurs pertinentes pour un gaz parfait et faire l'application numérique dans le cas de l'air à température ambiante.

2.3 Aspects énergétiques

Quiconque a déjà fait cours dans une classe sait qu'il faut dépenser du travail pour parler fort. Une des raisons est qu'une onde sonore transporte de l'énergie, c'est ce que nous allons étudier ici.



FIG. 3 : On place un piston dans le milieu. Au passage de l'onde il se déplace de $\Psi(t)$.

À cet effet imaginons un piston sans masse, d'extension transverse suffisamment grande pour qu'on puisse négliger les effets de bord, placé perpendiculairement à la direction de propagation d'une onde sonore à l'abscisse $z = z_0$ comme illustré figure 3.

19. Le piston va se déplacer lorsque l'onde passe. Justifier que s'il est sans masse, il ne perturbera pas l'onde.
20. Appelons $\Psi(t)$ son déplacement. Relier Ψ et ξ .

On fait le vide à gauche du piston, et un opérateur maintient le piston en position.

21. Justifier que si l'opérateur imprime au piston un mouvement caractérisé par le même déplacement $\Psi(t)$ que dans la situation précédente, une onde identique à la précédente se propagera à droite du piston.
22. Pourquoi dans ces conditions aucune onde ne se propage-t-elle vers la gauche ?
23. Calculer la force $F(t)$ que l'opérateur doit exercer par unité de surface du piston pour imposer le déplacement $\Psi(t)$.
24. On suppose pour simplifier les calculs que le déplacement du piston est sinusoïdal de pulsation Ω :

$$\Psi(t) = \Psi_0 \cos \Omega t \quad (12)$$

Calculer alors la puissance mécanique moyenne par unité de surface $\langle \mathcal{P} \rangle$ que l'opérateur doit dépenser pendant une période de l'onde.

25. On suppose que le déplacement est la somme de deux fonctions sinusoïdales de pulsations Ω_1 et Ω_2 . La puissance qui correspondrait à chacun de ces deux déplacements serait respectivement $\langle \mathcal{P} \rangle_1$ et $\langle \mathcal{P} \rangle_2$. Montrer que la puissance est alors $\langle \mathcal{P} \rangle_1 + \langle \mathcal{P} \rangle_2$.
26. En déduire que dans l'approximation acoustique, la puissance que doit fournir l'opérateur pour imprimer un mouvement quelconque (mais physiquement réaliste) est donnée par :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \rho_0 C \left\langle \left(\frac{d\Psi}{dt} \right)^2 \right\rangle \quad (13)$$

où on a introduit la vitesse quadratique moyenne de déplacement du piston.

Considérons maintenant un élément de volume dV du milieu d'extension petite devant la longueur d'onde de la perturbation sonore. Lors du passage de l'onde, cet élément de volume du milieu est comprimé (ou déprimé) et mis en mouvement.

27. Exprimer l'énergie cinétique de l'élément de volume. (on appellera v sa vitesse)
28. Calculer de même son énergie potentielle de compression.
29. Montrer en utilisant le fait que la pression moyenne est p_0 que l'énergie totale moyenne de l'élément de volume est :

$$d\langle U \rangle = dU_0 + \frac{1}{2} \chi \langle \pi^2 \rangle dV + \frac{1}{2} \rho_0 \langle v^2 \rangle dV \quad (14)$$

où dU_0 est son énergie interne de constitution.

30. Justifier que les résultats précédents conduisent à l'image que l'onde sonore transporte à la vitesse C une densité d'énergie sonore donnée par :

$$\mathcal{U} = \rho_0 \langle v^2 \rangle \quad (15)$$

$$= \chi \langle \pi^2 \rangle \quad (16)$$

31. Dans le cas particulier d'une onde sinusoïdale de pulsation Ω et d'amplitude ξ_0 , montrer que cette densité volumique d'énergie sonore devient :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \rho_0 \Omega^2 \xi_0^2 \quad (17)$$

2.4 Atténuation du son

Intéressons nous à une tranche donnée de milieu. Lors du passage de l'onde acoustique (on suppose toujours qu'elle se propage selon l'axe Oz) cette tranche subit une alternance de phases de compression et de détente. Cette alternance conduit à une variation alternative de la température de la tranche. Dans les questions précédentes, nous avons considéré que cette transformation était adiabatique. Nous allons ici étudier les conséquences du relâchement de cette hypothèse et admettre que de la chaleur peut s'échanger d'une tranche à l'autre.

On rappelle que tous les calculs abordés ici sont effectués dans le cadre de l'approximation acoustique.

32. Expliquer qualitativement ce que devient l'énergie acoustique d'une onde lors de son atténuation.
33. Dans le cas où le milieu est un gaz parfait, explicitez comment, dans le cadre de l'approximation acoustique, la température dépend de la pression.
34. Dans le cas général, on définit le coefficient d'échauffement adiabatique :

$$\beta = \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_S \quad (18)$$

Écrire alors la température du milieu $T(z)$ à un instant t donné.

35. La conduction de la chaleur est supposée régie par la loi de Fourier :

$$j_Q = -D \frac{\partial T}{\partial z} \quad (19)$$

où on a introduit le coefficient de diffusion thermique D . Commenter cette équation.

36. Prenons le cas d'une onde sinusoïdale, de longueur d'onde Λ . À un instant donné, la température est alors une fonction sinusoïdale de l'abscisse, de période spatiale Λ : $T(z) = T_0 + T_1 \cos(2\pi z/\Lambda + \phi)$. Donner l'expression en fonction de z du courant thermique associé.
37. Quelle propriété commune de la conduction de la chaleur et de l'atténuation de l'onde permet de relier l'une à l'autre ?
38. Préciser sans calcul quelles ondes vont être atténuées le plus vite : celles de haute fréquence, ou celles de basse fréquence ?

Globalement, la diffusion de la chaleur va contribuer à un échauffement moyen du milieu, conséquence d'une transformation d'énergie cinétique et de compression en énergie interne. Pour prendre ce phénomène en compte, il nous faut préciser la thermodynamique de la transformation.

On s'intéresse donc à un élément du milieu de masse dm et de volume dV soumis à l'onde sonore *supposée de faible amplitude*.

39. Montrer que la chaleur qu'il reçoit pendant le temps dt est donnée par :

$$\delta Q = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{dm}{\rho} dt \quad (20)$$

40. Montrer de même que sa variation de volume est donnée par

$$\delta(dV) = \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dm}{\rho} dt \quad (21)$$

41. Montrer que le premier principe de la thermodynamique appliqué à un élément de milieu de masse dm donne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \quad (22)$$

où l'on a introduit la densité d'énergie interne par unité de masse u (l'énergie interne d'un élément de milieu de masse dm est $u dm$) et où v_z représente comme précédemment la vitesse de déplacement du milieu due à l'onde.

42. On introduit de même la densité d'entropie par unité de masse s . Montrer que l'on a :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (23)$$

43. En déduire que la variation de la densité d'entropie est donnée par :

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{D}{T^2} \left| \frac{\partial T}{\partial z} \right|^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{D}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (24)$$

44. Quelle interprétation physique donnez-vous à chacun des deux termes de l'équation (24) ? Supposons que l'onde acoustique soit limitée dans le temps, et donc dans l'espace : c'est un *train d'onde* de longueur l .

45. En intégrant l'équation (24) sur un volume judicieusement choisi, montrer que l'entropie massique du milieu moyennée sur quelques périodes de l'onde augmente au cours du temps.
46. En déduire comment évolue la température moyenne et montrer que l'onde est donc atténuée.

Partie B : Le rôle de la couche d'ozone stratosphérique

La diminution de la couche d'ozone stratosphérique est due à l'émission de gaz chlorofluorocarbène (CFC). Les rayons UV sont alors moins bien interceptés dans la haute atmosphère et l'énergie solaire arrive davantage au sol. Il en résulte un réchauffement de la basse atmosphère. Un autre inconvénient introduit par la diminution de la couche d'ozone dans la haute atmosphère est aussi de laisser passer les UV proches, lesquels sont nocifs pour la peau.

Dans toute cette partie, on négligera les effets de la pesanteur.

Données :

- * Charge de l'électron : $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- * Masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- * Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- * Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$
- * Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
- * $\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique, issue du soleil, dans la couche d'ozone de la stratosphère. On considère l'ozone comme un diélectrique linéaire, homogène et isotrope. On néglige la polarisabilité d'orientation et on ne tient donc compte que de la polarisabilité moléculaire.

On suppose que la couche d'ozone occupe le demi-espace $z > 0$. Le champ électrique de l'onde qui s'y propage est noté en complexe : $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \frac{kz}{2})} \vec{u}_x$.

Sous l'action de ce champ les molécules se polarisent. On envisage le modèle de l'électron élastiquement lié dans lequel on étudie un seul électron par molécule d'ozone. Cet électron (charge $-e$ et masse m) situé en un point M est élastiquement lié au centre O fixe de la molécule. On note $\vec{r} = \vec{OM}$, et le cas échéant, en complexe $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$.

Cet électron est soumis à trois forces :

- * une force d'interaction avec l'onde électromagnétique,
- * $\vec{f}_A = -m\omega_0^2 \vec{r}$ où ω_0 est une pulsation propre caractéristique du mouvement de l'électron,
- * $\vec{f}_B = -m\Omega \frac{d\vec{r}}{dt}$.

- [9] Quel est le nom du protocole international qui régleme les émissions de CFC ? Quelle est l'année de sa signature ?
- [10] Donner la plage d'altitudes par rapport à la surface de la Terre correspondant à la stratosphère ?
- [11] À quels phénomènes physiques correspondent les forces $\vec{f}_A$ et $\vec{f}_B$? Quelle est la dimension de Ω ?
- [12] On ne tient pas compte de la force magnétique qu'exerce l'onde sur l'électron. Pourquoi ?
- [13] Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron. Les équations étant linéaires, on utilise la notation complexe. En déduire l'équation différentielle vérifiée par le vecteur position $\vec{r}$ de l'électron. Déterminer $\vec{r}$ qu'on exprimera notamment en fonction de $\vec{E}$.
- [14] En déduire le moment dipolaire induit $\vec{p}$ ainsi que la polarisation $\vec{P}$ de la stratosphère. On note n_p la densité particulaire d'ozone dans la stratosphère.
- [15] Le milieu n'est pas magnétique et est globalement neutre. Écrire les équations de Maxwell reliant les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et la polarisation du milieu.
- [16] Les champs n'étant fonction que de z et t , en déduire l'équation :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

- [17] Déduire de l'équation obtenue à la question précédente écrite sous forme complexe et de l'expression de la polarisation $\vec{P}$, l'expression de k^2 . On posera :

$$\omega_p^2 = \frac{n_p e^2}{m \varepsilon_0}$$

- 18] L'indice complexe est défini par $\underline{n}(\omega) = \frac{\varepsilon k}{\omega}$. En déduire $\underline{n}^2$.

En notant $\underline{n} = n_1 - in_2$, compte tenu d'une approximation dont on ne se préoccupe pas ici, on admet les expressions respectives de n_1 et n_2 :

$$1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Omega^2\omega^2)} \quad \text{et} \quad \frac{\Omega\omega\omega_p^2}{2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Omega^2\omega^2)}$$

- 19] Quelle est l'expression du champ électrique $\vec{E}$ (observable) en fonction notamment de n_1 et n_2 ? Comment appelle-t-on n_1 et n_2 ? Justifier.
- 20] Constaté qu'il apparaît un terme d'atténuation et en déduire la distance caractéristique δ du phénomène en fonction de c , ω et n_2 .
- 21] On donne $\omega_0 = 7,4 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ la pulsation centrale de la bande d'absorption de l'ozone. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe ω_0 ? On donne $\Omega = 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$ ainsi que la densité particulière maximum d'ozone dans la stratosphère $n_p = 4 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$. Calculer δ pour les deux fréquences suivantes :
- ◊ f_0 correspondant à la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 250 \text{ nm}$
 - ◊ f correspondant à la longueur d'onde dans le vide $\lambda = 600 \text{ nm}$
- Conclure : pourquoi est-il important de maintenir la couche d'ozone stratosphérique ?

SESSION 2004

SECONDE PARTIE : ONDES GUIDÉES DANS LE DOMAINE CENTIMÉTRIQUE

La production, la propagation et l'utilisation des ondes électromagnétiques dans le domaine des hyperfréquences (fréquences de l'ordre du gigahertz - on rappelle que $1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$) sont d'abord étudiées. Une application courante est ensuite envisagée : le principe du four à micro-ondes (figure 5).

CONSTANTES FONDAMENTALES, VALEURS ET FORMULES UTILES

- On rappelle les équations de Maxwell dans le vide :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ; \quad \vec{\text{div}} \vec{E} = 0 ; \quad \vec{\text{div}} \vec{B} = 0$$

- On donne :

- charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$;
- masse de l'électron : $m = 0,911 \times 10^{-30} \text{ kg}$;
- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$;
- permittivité du vide ε_0 telle que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ SI}$;
- perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ SI}$.

- Conventions :

Les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont les vecteurs unitaires orientant les axes Ox, Oy et Oz.

Le vecteur $\vec{e}$ est un vecteur unitaire quelconque.

Notation complexe d'un vecteur fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω :

$$\underline{\vec{E}} = A \exp i(\omega t + \varphi) \vec{e},$$

A et φ étant réels (éventuellement fonction des coordonnées x, y et z).

Le vecteur champ en notation réelle vaut : $\vec{E} = \text{Re} \left(\underline{\vec{E}} \right) = A \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}$

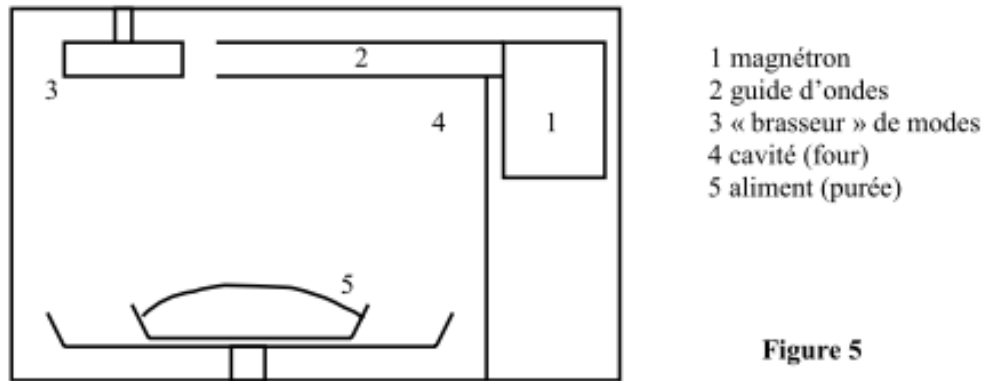


Figure 5

Les parties D, E et F sont indépendantes.

D. Production des ondes électromagnétiques dans le domaine des hyperfréquences.

Elle peut se faire de différentes façons : l'une d'elles est l'utilisation d'un magnétron.

Ce composant est une lampe constituée d'une enveloppe métallique dans laquelle règne le vide et de deux électrodes (voir figure 6) :

- la cathode C, de centre O, comportant un filament porté à haute température et émetteur d'électrons avec une vitesse v_C suffisamment faible pour que dans la suite on la suppose nulle et
- l'anode A.

La cathode est au potentiel $V_C = 0$, l'anode au potentiel V_A supposé positif. On pose :

$$U = V_A - V_C > 0$$

On se propose de retrouver quelques ordres de grandeur. Afin de simplifier les calculs, on envisage la disposition à plaques parallèles qui est parfois (mais rarement) utilisée : on suppose que les électrodes, distantes de a , sont géométriquement identiques (même forme et même surface S), qu'elles sont parallèles et face à face.

En outre, on se place en régime permanent : on note I , constante positive, l'intensité du courant qui traverse le circuit.

Dans ces conditions, on suppose que :

- les grandeurs utiles dans l'espace entre les électrodes sont fonctions de la seule variable x ;
- les vecteurs caractérisant le mouvement des charges sont colinéaires à l'axe des x .

L'action du poids des électrons est supposée négligeable devant l'action des autres forces.

Les questions D.I. et D.II. sont indépendantes.

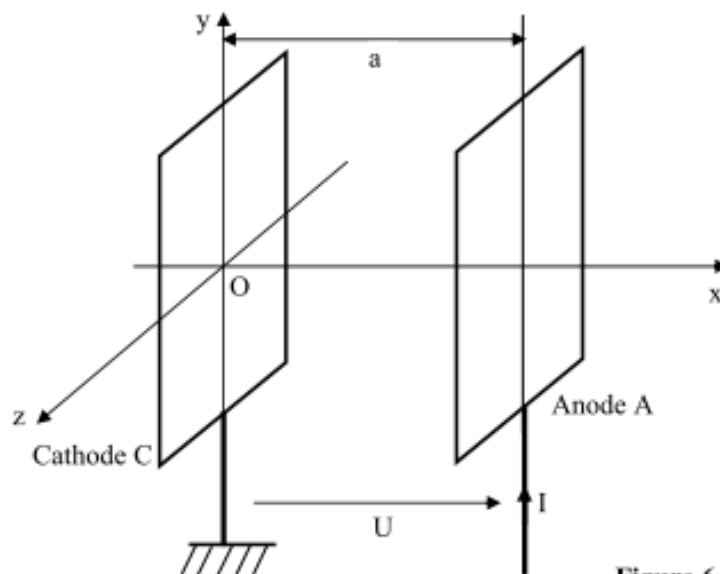


Figure 6

D.I.

Si la tension U n'est pas trop élevée, il existe entre les électrodes une charge d'espace de densité $\rho(x)$, négative, mesurée en $C.m^{-3}$.

Soient $\vec{v}$, $\vec{j}$, $\vec{E}$ et V , la vitesse d'un électron, le vecteur densité de courant, le champ électrique et le potentiel (mesuré par rapport à la cathode) en un point M d'abscisse x . On a donc $V(a) = U$.

On pose : $\vec{v} = v \vec{e}_x$, $\vec{j} = j \vec{e}_x$ et $\vec{E} = E \vec{e}_x$.

D.I.1.

Faire un schéma dans lequel on placera les électrodes, l'axe des abscisses Ox et les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{j}$ et $\vec{E}$ en un point quelconque M entre les électrodes.

Exprimer $\vec{j}$ en fonction de $\vec{v}$.

Écrire l'équation de Poisson reliant le potentiel V à la densité de charge ρ .

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à un électron entre C et M .

Exprimer $\vec{j}$ en fonction de I .

D.I.2.

Établir une équation différentielle du 2^{ème} ordre vérifiée par $V(x)$.

Il est possible de résoudre cette équation sans hypothèses supplémentaires. On se contente ici de chercher une solution de la forme $V(x) = Kx^p$, K et p étant des constantes.

Déterminer K et p .

D.I.3.

En déduire la caractéristique $I(U)$ du composant.

Application numérique : $U = 1 \text{ kV}$, $S = 0,5 \text{ cm}^2$ et $a = 4 \text{ mm}$. Calculer I .

D.I.4.

On pose $v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$, vitesse des électrons à leur arrivée sur l'anode.

Connaissant la valeur de p , déterminée en D.I.2., montrer que $v = v_A \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Effectuer l'intégration correspondante et calculer le temps de transit T des électrons de la cathode vers l'anode. Que pensez-vous du résultat, connaissant les caractéristiques du magnétron ?

D.I.5.

Ainsi polarisé et utilisé, quel rôle joue le magnétron ?

D.II.

Lorsque la tension devient plus importante, le modèle n'est plus valable : on admet que la charge d'espace disparaît, que l'intensité du courant est indépendante de la tension et que le champ $\vec{E}$ entre A et C est uniforme (situation du condensateur plan).

On exerce le champ $\vec{B}$ uniforme parallèle à Oz et de même sens $\vec{B} = B \vec{e}_z$ ($B > 0$).

D.II.1.

Faire un schéma indiquant l'allure de la trajectoire d'un électron éventuellement capté par l'anode.

D.II.2.

Montrer que, B étant fixé, il existe une tension U_C en dessous de laquelle aucun électron n'atteint l'anode.

Définir ce que l'on appelle la parabole de coupure $U_C(B)$.

Calculer B pour $U_C = 3 \text{ kV}$ et $a = 4 \text{ mm}$. Le résultat est-il compatible avec le fait que les magnétrons soient munis d'aimants ?

D.II.3.

On choisit les valeurs de U et de B au voisinage de la parabole de coupure. On modifie la direction des vitesses électroniques grâce à une onde électromagnétique de faible amplitude et de pulsation ω .

Les dimensions des électrodes étant grandes par rapport à la distance a les séparant, les courants sont importants et peuvent être ainsi commandés par un signal de faible puissance.

Que peut-il se passer, dans certaines conditions, si le gain de l'amplificateur ainsi constitué dépasse un certain seuil ? Cet effet est-il dangereux ou utile dans le problème qui nous occupe ?

E. Guide d'onde rectangulaire et cavité.

E.I.

On étudie la transmission d'une onde électromagnétique de fréquence $f = 2,45$ GHz par un guide d'onde rectangulaire jusque dans une cavité parallélépipédique.

La longueur d'onde correspondante dans le vide est notée λ_0 .

Le guide considéré est un tube creux de section rectangulaire (dimensions intérieures selon Ox et Oy : a et b) dont les parois sont en métal supposé non magnétique et parfaitement conducteur (voir figure 7).

La propagation est envisagée à l'intérieur du guide et selon Oz dans le sens des z positifs.

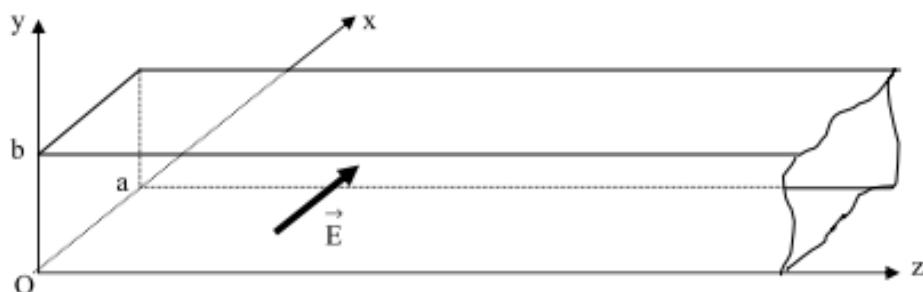


Figure 7

E.I.1.

Dans la pratique, un guide de bonne qualité est en aluminium et l'intérieur est recouvert d'une pellicule d'or. Pourquoi ?

E.I.2.

Justifier brièvement qu'une onde plane ne peut pas se propager dans le guide.

E.I.3. Champ électrique

On souhaite guider une onde monochromatique sinusoïdale de pulsation ω dont le champ électrique reste parallèle à Ox .

On suppose que le champ électrique, en notation complexe, est tel que

$$\vec{E} = E(x, y) \exp i(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

avec k , nombre réel positif, différent de $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

E.I.3.a.

En utilisant les lois générales de l'électromagnétisme, montrer que le champ électrique $E(x, y)$ ne dépend pas de x .

On le notera $E(y)$. Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait $E(y)$.

On suppose la quantité $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ positive, ce qui entraîne l'existence d'une pulsation de coupure ω_c . Quelle la forme des solutions $E(y)$?

E.I.3.b.

D'une façon générale, quelles sont les propriétés du champ électrique à l'interface vide – conducteur ?

Que vaut $\vec{E}$ pour $y = 0$ et $y = b$? En déduire qu'il existe des modes de propagation repérés par l'entier n positif.

Dans toute la suite, on se place dans le cas où $n = 1$ (mode fondamental).

Donner l'expression en notation réelle du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de E_0 , valeur maximale du champ.

Trouver la relation de dispersion $\omega(k)$.

E.I.3.c.

Que va-t-on trouver sur les parois $x = 0$ et $x = a$?

E.I.4. Champ magnétique : on suppose qu'il n'existe pas de champ statique.

E.I.4.a.

Utiliser une des équations de Maxwell pour établir l'expression des composantes, en notation réelle, du vecteur-champ $\vec{B}$ en fonction de E_0 .

E.I.4.b.

Quelles sont les propriétés du champ magnétique à la surface d'un conducteur parfait ?

Que valent les coordonnées B_y et B_z en $y = 0$ et $y = b$?

E.I.5.

La propagation du mode fondamental (défini aux paragraphes E.I.3.a et E.I.3.b.) n'est possible que si la pulsation est supérieure à la pulsation de coupure ω_c , donc si la fréquence f est supérieure à une fréquence de coupure f_c .

Que vaut numériquement b pour $f_c = 1,225$ GHz ?

E.I.6. Transmission de l'énergie.

E.I.6.a.

Donner l'expression en notation réelle du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Calculer ses coordonnées.

E.I.6.b.

Quelles sont les coordonnées de $\langle \vec{\Pi} \rangle$, valeur moyenne dans le temps de $\vec{\Pi}$? Que peut-on en conclure sur la propagation de l'énergie ?

E.I.6.c.

Quelle est la puissance moyenne $P_m = \langle P_{cl} \rangle$ transmise à travers une section droite du guide d'onde ? La puissance du four étant de 600 W et étant supposée répartie sur le seul mode fondamental, déterminer E_0 , intensité du champ électrique de l'onde transmise par le guide. On prendra $a = 4$ cm.

E.II. Cavité.

L'onde électromagnétique parvient dans le four proprement dit, cavité parallélépipédique de dimensions (A, B et C) constituée de 6 parois métalliques rectangulaires supposées parfaitement conductrices. On définit un trièdre direct Oxyz à partir d'un coin et des arêtes du four (voir figure 8).

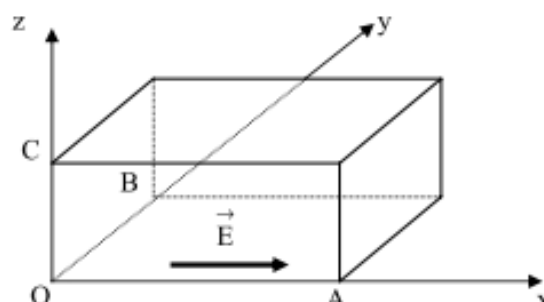


Figure 8

On suppose le champ électrique parallèle à l'axe Ox. Il oscille à la pulsation ω et on le note $\vec{E}_x(x, y, z, t) = E(x, y, z) \exp(i\omega t) \vec{e}_x$.

E.II.1.

Pour la même raison qu'au E.I.3.a, $\vec{E}_x$ est indépendant de x. On cherche donc $E(x, y, z) = f(y) \times g(z)$.

Montrer que les lois de l'électromagnétisme entraînent que $\frac{f''(y)}{f(y)}$ et $\frac{g''(z)}{g(z)}$ sont des constantes, f'' et g'' étant les dérivées secondes des fonctions f et g.

E.II.2.

Que vaut f(y) pour y = 0 et y = B ? Que vaut g(z) pour z = 0 et z = C ?

En déduire que f et g sont des fonctions trigonométriques sinusoïdales et qu'il existe une double infinité de solutions (modes), chaque mode étant caractérisé par deux nombres entiers ℓ et m.

E.II.3.

Pourquoi, entre le guide et la cavité, le constructeur place-t-il « un brasseur de modes », sorte de ventilateur à pales métalliques qui distribue l'énergie électromagnétique sur les différents modes (voir figure 5) ?

F. « Modélisation d'une substance à réchauffer ».

La fréquence choisie vaut $f = 2,45$ GHz.

On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- les effets éventuels du champ magnétique sont négligés : on ne s'intéresse donc qu'au seul champ électrique ;
- la propagation est également négligée : on suppose que le vecteur champ électrique est le même en tout point à un instant donné.

F.I.

On considère un élément de substance parcouru par un courant de vecteur densité de courant $\vec{j}$ dans lequel le champ électrique vaut $\vec{E}(t)$.

Justifier que la densité volumique de puissance (en W.m^{-3}) cédée par le champ électromagnétique à la matière vaut $\frac{dP_{\text{el}}}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}$.

F.II.

On admet que, dans un corps quelconque, supposé non magnétique, le vecteur $\vec{j}$ est la somme de deux termes :

- Le courant de charges libres vérifiant la loi d'Ohm $\vec{j}_L = \sigma \vec{E}$, σ étant la conductivité de la substance.
- Le courant de polarisation $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, $\vec{P}$ étant le vecteur polarisation.

Dans un milieu linéaire, $\vec{P}$ est supposé proportionnel à $\vec{E}$ et on note :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \quad \text{avec } \epsilon_r > 1.$$

On suppose le champ électrique sinusoïdal de la forme $\vec{E} = E_0 \cos \omega t \vec{e}$.

Montrer que dans ces conditions seul l'effet Joule est responsable de la dissipation de la puissance moyenne.

F.III.

Dans le domaine des fréquences de l'ordre du gigahertz, la conductivité est très faible. L'effet Joule qui ne peut pas rendre compte des phénomènes observés, est négligé. On doit tenir compte de l'absorption en supposant que la polarisation est déphasée par rapport au champ électrique.

F.III.1.

On utilise la représentation complexe. On suppose $\vec{E} = E_0 \exp(i\omega t) \vec{e}$ avec (E_0 réel).

On introduit une partie imaginaire à la permittivité : $\underline{\epsilon}_r = \epsilon' - i \epsilon''$

Déterminer, en notation complexe, le vecteur $\vec{P} = \epsilon_0 (\underline{\epsilon}_r - 1) \vec{E}$ et en notation réelle, le vecteur

$$\vec{P} = \text{Re} \left(\frac{\vec{P}}{e^{i\omega t}} \right).$$

F.III.2.

Calculer la puissance dissipée par unité de volume dans la matière puis exprimer sa moyenne temporelle en fonction de ϵ'' , E_0 et ω .

F.III.3.

On veut réchauffer un échantillon de purée de pomme de terre (assimilable à un parallélépipède rectangle de dimensions : $10 \times 2 \times 5$, les longueurs étant exprimées en cm) pour laquelle $\epsilon'' = 25$.

On rappelle que la fréquence vaut $f = 2,45$ GHz.

Si on admet que la puissance maximale de 600 W est transférée à la purée, quelle est l'intensité du champ à l'intérieur de la purée ?

SESSION 2002

C.I. PROPAGATION DU SON DANS LES FLUIDES

On étudie la propagation d'ondes sonores planes dans un tuyau cylindrique de section S , de génératrices parallèles à Ox , supposé de longueur infinie. Le tuyau est rempli d'un fluide parfait ; on néglige l'influence de la pesanteur et les seules forces s'exerçant sur un volume de fluide donné sont les forces de pression. En l'absence d'onde sonore, le fluide est au repos : sa pression P_0 , sa température T_0 et sa masse volumique ρ_0 sont uniformes.

Une section donnée de fluide est repérée par l'abscisse x de sa position *au repos* (représentation dite "lagrangienne"). Cette section se déplace selon Ox sous l'action de l'onde : à l'instant t , son abscisse est $x + s$, sa pression P , sa température T et sa masse volumique ρ .

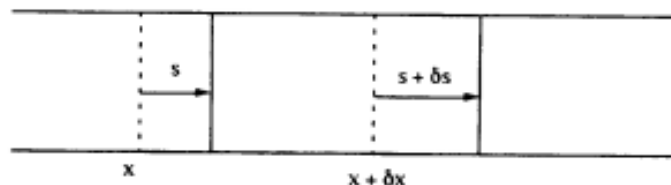
s , P , T et ρ sont considérées comme des fonctions de x et de t .

On définit pour la section de fluide : la vitesse vibratoire $u(x, t) = \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_x$, la surpression

vibratoire $p(x, t) = P - P_0$ et la dilatation $\theta(x, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$.

C.I.1. ETABLISSEMENT DE L'EQUATION D'ONDE

On raisonne sur la tranche élémentaire de fluide comprise, *au repos*, entre les sections d'abscisses x et $x + \delta x$. A l'instant t , les déplacements de ces sections sont respectivement s et $s + \delta s$.



C.I.1.a.

Montrer que la conservation de la masse de la tranche de fluide impose une relation entre θ et $\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_t$.

On considère dans toute la suite que θ , $\frac{p}{P_0}$ et $\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_t$ sont très petits devant l'unité (approximation "acoustique"), ce qui permet de linéariser les différentes expressions obtenues. Que devient dans ces conditions la relation exprimant la conservation de la masse ?

C.I.1.b.

On admet qu'au cours du mouvement de la tranche de fluide, la pression P et la masse volumique ρ sont liées par une relation que l'on met sous la forme $\rho = \varphi(P)$. On définit la compressibilité χ_o du fluide pour la transformation considérée par $\chi_o = \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{d\rho}{dP} \right)_o = \frac{\varphi'(P_o)}{\rho_o}$. En déduire une relation entre la surpression p et la dilatation θ .

C.I.1.c.

Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la tranche de fluide, en explicitant les différentes forces qui s'appliquent sur elle. En déduire une relation entre $\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_t$ et $\left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right)_x$.

C.I.1.d.

Déduire des trois relations précédentes l'équation d'onde satisfaite par p et faisant intervenir ρ_o et χ_o .

Quelle est la forme des équations d'onde satisfaites par s , et θ ?

C.I.2. CÉLÉRITÉ DU SON

C.I.2.a.

Montrer qu'il existe des solutions à l'équation d'onde de la forme : $p = f\left(t - \frac{x}{c_s}\right)$ où c_s est une constante et f une fonction a priori quelconque de la variable composée $t - \frac{x}{c_s}$. Exprimer c_s en fonction de ρ_o et χ_o . Justifier le qualificatif d'onde progressive donné à ce type de solution.

C.I.2.b.

Montrer qu'il existe, pour une onde progressive, une relation simple entre la surpression p et la vitesse vibratoire u , relation que l'on exprimera en fonction de χ_o et c_s .

C.I.2.c.

Le fluide contenu dans le tube est un gaz diatomique considéré comme parfait. Les transformations thermodynamiques de ce gaz sous l'action de l'onde sonore sont supposées isentropiques.

Quelle est la forme de la fonction $\varphi(P)$? Etablir l'expression de la célérité c_s des ondes en fonction de la température T_o de repos, de la masse molaire M du gaz et du rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ des capacités thermiques molaires à pression et à volume constant. La vitesse quadratique moyenne des molécules d'un gaz parfait de masse molaire M à la température T_o est $\sqrt{\frac{3RT_o}{M}}$; comparer à c_s et interpréter.

C.I.3. INTENSITÉ SONORE

La propagation de l'onde dans le tube s'accompagne d'un flux d'énergie.

C.I.3.a.

Exprimer, en fonction de la surpression p et de la vitesse vibratoire u , la puissance surfacique Π_a associée aux forces de surpression acoustique.

C.I.3.b.

On considère une onde acoustique plane progressive sinusoïdale. La surpression se met alors sous la forme $p = p_m \cos[\omega(t - x/c_s)]$.

On définit l'intensité sonore I comme la valeur moyenne temporelle de Π_a . Donner l'expression de I en fonction de p_m , χ_o et c_s , puis en fonction de p_m , P_o , T_o et des caractéristiques du gaz.

C.I.3.c.

L'intensité minimale perceptible par l'oreille humaine, pour la pulsation $\omega = 2000\pi \text{ rad.s}^{-1}$, est $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$. Evaluer l'amplitude p_{m} de la surpression correspondante dans le cas de l'air à 300 K sous 0,1 MPa.

Un élève remarque la faiblesse de la valeur de p_{m} comparée à la valeur de P_0 et s'étonne qu'un tel signal sonore ne soit pas noyé dans les fluctuations de la pression de repos P_0 et puisse être distingué par l'oreille. Quelle réponse peut-on lui faire ?

C.I.3.d.

Le niveau sonore N (en décibels) correspondant à une intensité I donnée est défini par la relation :

$$N = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où $\log$ désigne le logarithme décimal et I_0 la valeur $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ précédente, prise comme référence.

Le seuil de douleur correspond approximativement à une intensité de 120 dB. Quelle est la valeur correspondante de p_{m} ? Un récipient contient de l'eau liquide à l'air libre, au repos dans le champ de pesanteur. A quelle profondeur faut-il approximativement s'enfoncer sous la surface libre pour obtenir une surpression hydrostatique égale à p_{m} (120 dB) ?

SESSION 1999

Partie 3 : ONDES

On s'intéresse dans cette question à la propagation d'ondes scalaires à une dimension spatiale, notée « x », le vecteur unitaire de la direction de propagation sera noté $\vec{i}$.

1.1) A tous points de l'espace $M(x,y,z)$, on associe une fonction scalaire $s(x,t)$ qui n'est fonction que du temps et de la coordonnée x ; $s(x,t)$ est solution de l'équation différentielle ci-dessous, dite « équation de d'Alembert » ou équation de propagation à une dimension spatiale.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

où c représente la célérité de l'onde.

On propose les changements de variables suivants

$$u = ct - x \text{ et } v = ct + x$$

En exprimant les deux membres de l'équation différentielle précédente en fonction des dérivées partielles de s par rapport à u et à v , montrer que :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = 0$$

En déduire que la solution générale de l'équation de d'Alembert à une dimension spatiale est :

$$s(x,t) = f(ct - x) + g(ct + x)$$

1.2.) Montrer que $f(x,t)$ et $g(x,t)$ décrivent deux ondes planes, vérifier que l'axe des x est bien la direction de propagation, dans quel sens pour chacune des deux ondes ? Avec quelles vitesses ? Expliquez toutes vos affirmations.

1.3) Proposer une écriture de f et g si celles-ci représentent deux ondes planes monochromatiques de pulsation ω . Qu'est-ce que la longueur d'onde ? Expliquez sa signification en français.

1.4.) Pour résoudre l'équation de d'Alembert précédente, peut-on envisager une méthode différente de celles des ondes progressives, par exemple en essayant de séparer les variables x et t ? A quel concept ondulatoire aboutit cette recherche ? Cette méthode est-elle équivalente à la précédente ? Connaissiez-vous des situations où cette méthode « à variables séparées » est particulièrement bien adaptée ?

2.1.) On considère une mole de gaz parfait, de pression P , de volume V , de température T et d'entropie S . Le travail, éventuellement échangé avec l'extérieur, est limité au seul travail des forces de pression.

Au repos, les variables P, V, T valent respectivement P_0, V_0, T_0 . On considère une transformation réversible à partir de l'état de repos, entraînant des variations petites par rapport aux valeurs de repos, dP, dV, dT et dS .

Ecrire les relations différentielles exprimant la variation d'entropie au cours de la transformation, d'une part, en fonction de dV et dT et d'autre part, en fonction de dP et dT .

2.2.) Exprimer dS en fonction de dV et dP , à l'aide de P_0, V_0 et de $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$.

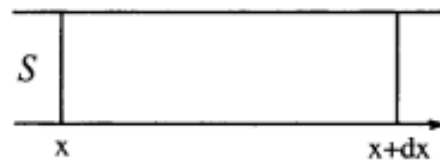
2.3.) En déduire que le coefficient de compressibilité isentropique du gaz $\chi_s = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{s_0}$

s'exprime en fonction de P_0 et de γ .

Application numérique : Calculer χ_s avec $\gamma = 1,4$ et $P_0 = 1,1$ bar.

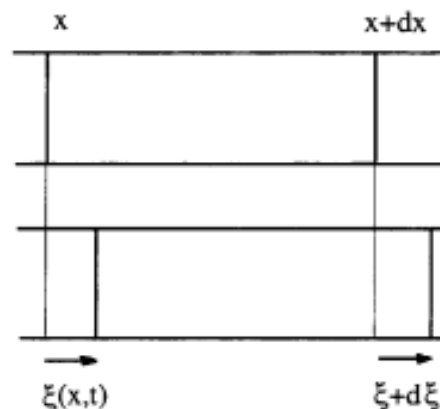
3.1.) On considère maintenant le gaz parfait, a priori illimité dans toutes les directions. Au repos, la pression est uniforme et vaut P_0 , la masse volumique également uniforme est notée ρ_0 . Les effets de la pesanteur sont négligés.

Cette onde acoustique se manifeste en un point $M(x,y,z)$ par une variation de la pression $p(x,t)$, très petite devant P_0 ; $p(x,t)$ est appelée « surpression acoustique ». La transformation élémentaire, dont le gaz est le siège au passage de l'onde acoustique, est supposée isentropique. On considère un petit élément de gaz, délimité par un cylindre de génératrices parallèles à Ox et par deux sections droite d'aire S et d'abscisse x et $x + dx$.



Quel est le bilan des forces de pression exercées sur cet élément ?

3.2) Pendant le temps dt , il résulte, entre autres, du passage de l'onde, un petit déplacement $\xi(x,t)$ de l'élément fluide.



Etablir la relation liant la dérivée partielle par rapport à x , de la surpression acoustique au déplacement $\xi(x,t)$.

3.3.) A l'instant $t + dt$, le volume de l'élément de fluide a varié. En déduire la relation liant la dérivée partielle, par rapport à x du déplacement $\xi(x,t)$ à la surpression $p(x,t)$.

3.4.) Etablir l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction $\xi(x,t)$. Qualifier cette équation.

3.5.) Etablir l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction $p(x,t)$. Remarque ?

3.6.) On appelle « vitesses acoustique » la fonction $u(x,t) = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}$

Etablir l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction $u(x,t)$. Vérifier que l'on a une équation de d'Alembert. En déduire la célérité de l'onde en fonction de ρ_0 et χ_s ; vérifier l'homogénéité.

3.7) En déduire l'expression de la célérité de l'onde acoustique dans le fluide en fonction de γ , P_0 et ρ_0 .

Application numérique : calculer c , avec :

$$\gamma = 1,4 ; P_0 = 1,1 \text{ bar et } \rho_0 = 1,3 \text{ Kg.m}^{-3}.$$

3.8.) Exprimer cette même célérité à l'aide de la température T_0 , de la masse molaire M du gaz parfait considéré, de γ et de R la constante du gaz parfait.

Application numérique : $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$, calculer T_0 .

3.9.) A votre avis, de quel gaz s'agit-il ? justifiez précisément votre affirmation.

3.10.) Au lieu de prendre l'hypothèse « isentropique » pour les transformations élémentaires dont le gaz est le siège, on prend l'hypothèse « isotherme ». Quelle serait, dans ce cas, l'expression de la célérité et sa valeur numérique dans les conditions du problème.

4.1.) Le fluide possède par ailleurs une conductivité thermique K , une capacité thermique massique à pression constante notée ici c_p , la masse volumique au repos est toujours notée ρ_0 . En reprenant la question 6 de la 2^{ème} partie, écrire l'équation différentielle dite « de la chaleur » et faire apparaître la diffusivité thermique D_{th} en précisant son unité.

4.2.) On se propose d'expliquer l'utilisation de la compressibilité isentropique χ_s dans l'expression de la célérité des ondes acoustique dans le fluide.

Donner une explication qualitative sommaire, puis, dans le cas d'ondes sinusoïdales, comparer la distance parcourue par une onde acoustique pendant une période temporelle et la distance parcourue par les échanges thermiques (ondes thermiques) pendant le même temps.

Application numérique : avec :

$$\gamma = 1,4 ; \rho_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}; R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}; T_0 = 22^\circ\text{C} ; M = 29 \text{ g.mol}^{-1} ;$$

$$K = 2,5.10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} ; c_p = 10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}.$$

Discuter.

4.3.) En revenant au cas isentropique et à l'approximation acoustique ; une onde plane progressive sinusoïdale se propage suivant Ox , dans le sens de $\vec{i}$ avec une pulsation ω et à la célérité c . Exprimer la puissance moyenne P_m qui traverse une section S en fonction de S , ρ_0 et à l'aide de $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$ avec $k = \omega/c$. On utilisera la relation : $p = \rho_0 \cdot c \cdot u$, que l'on établira.

4.4.) Calculer la valeur efficace de la surpression acoustique notée p_{eff} pour une intensité sonore égale à $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ (l'intensité sonore se définit par le rapport $I = P_m/S$).

4.5.) Que vaut la valeur efficace de la surpression acoustique p'_{eff} pour un niveau sonore de 120 dB (le niveau sonore en décibel se définit par $N = 10 \log_{10}(I/I_0)$).

4.6.) En fait, le gaz est dans un tuyau sonore cylindrique, de section S et d'axe confondu avec Ox . Ce tuyau sonore a une longueur $L = 1\text{m}$ et il est fermé à l'une de ses extrémité et ouvert à l'autre. Déterminer les fréquences du fondamental ν_0 et du premier harmonique ν_1 .

4.7.) A ν_1 , on a une amplitude maximale des déplacements dans l'air égale à $\xi_0 = 1 \text{ mm}$. Déterminer l'amplitude maximale de la surpression acoustique p_0 et, dans l'hypothèse isentropique, déterminer l'amplitude maximale des variations de température ΔT_0 .

4.6.) En fait, le gaz est dans un tuyau sonore cylindrique, de section S et d'axe confondu avec Ox . Ce tuyau sonore a une longueur $L = 1\text{ m}$ et il est fermé à l'une de ses extrémité et ouvert à l'autre. Déterminer les fréquences du fondamental ν_0 et du premier harmonique ν_1 .

4.7.) A ν_1 , on a une amplitude maximale des déplacements dans l'air égale à $\xi_0 = 1\text{ mm}$. Déterminer l'amplitude maximale de la surpression acoustique p_0 et, dans l'hypothèse isentropique, déterminer l'amplitude maximale des variations de température ΔT_0 .

5.1.) On s'intéresse, pour conclure, à la propagation d'une onde électromagnétique dans un matériau bon conducteur comme le cuivre. La conductivité électrique du cuivre est $\sigma = 6.10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$; sa permittivité diélectrique et sa perméabilité magnétique sont celles du vide, c'est à dire, respectivement ϵ_0 et μ_0 .

Le milieu occupe le demi-espace $x \geq 0$ et on se limite à une propagation monodimensionnelle suivant x croissant, de $x = 0$ jusqu'à l'infini. On considérera la densité volumique de charge électrique comme nulle sans justification.

Ecrire les équations de Maxwell dans le cas de ce milieu conducteur qui obéit à la loi d'Ohm (en fonction de σ , ϵ_0 , μ_0 et $\rho_{\text{charge}} = 0$).

5.2.) On s'intéresse plus particulièrement au champ électrique $\vec{E}$. Ecrire l'équation différentielle relative à $\vec{E}$ en découplant le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ dans les équations de Maxwell.

5.3.) En régime sinusoïdal de pulsation ω , on recherche des solutions de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(kx - \omega t)}$$

où ω est réel et k , *a priori*, complexe ; on posera $k = k' + jk''$.

Quelle est la signification de k' et, respectivement, de k'' ?

A l'aide de l'équation différentielle relative à $\vec{E}$, donner l'expression de k^2 .

5.4.) Dans l'équation différentielle ci-dessus, on souhaite ne conserver que le terme « diffusif », identifier ce terme et proposer une approximation portant sur ω et les caractéristiques du milieu. Dans le cas du cuivre ($\sigma = 6.10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\text{ SI}$; $\epsilon_0 = 8,854.10^{-12}\text{ SI}$), cette approximation est-elle très restrictive ?

5.5.) Résoudre l'équation différentielle en $\vec{E}$, donner l'expression réelle de $\vec{E}$ sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\frac{-x}{\delta_p}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta_p}\right)$$

Quelle est la signification de δ_p . Calculez-le pour 1 kHz, 1 MHz, 1GHz.

5.6.) Comparer avec les ondes thermiques de la partie 2 (question 6). Un matériau comme le cuivre possède une conductivité électrique élevée et une conductivité thermique élevée par rapport à d'autres matériaux usuels. Il est réputé « bon conducteur de la chaleur » pourquoi ? Pouvez-vous expliquer qualitativement ce phénomène? De même, le cuivre est « bon conducteur de l'électricité », expliquez-le qualitativement. En revanche, ce matériau s'oppose au passage des ondes électromagnétiques, et ce, d'autant plus que la fréquence est élevée. Expliquez cette constatation en précisant le phénomène physique qui en est à l'origine.